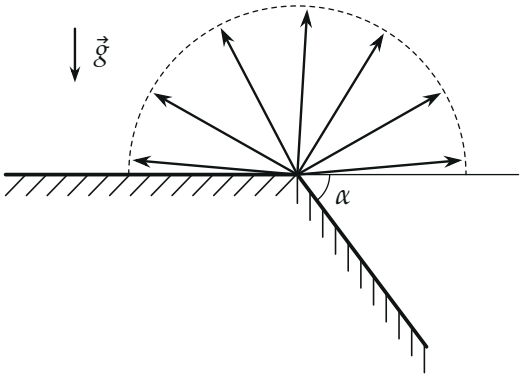
Фейерверк у вершины склона

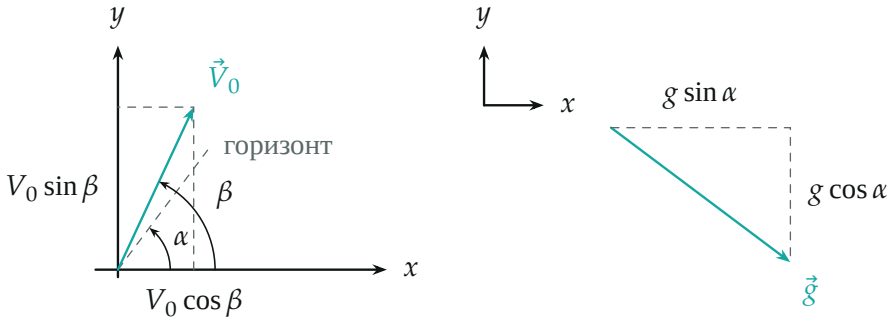
Задача 2. [Физтех 2023/24, 10 класс, варианты 10-05–10-06, задача 2] Плоская поверхность склона образует с горизонтом угол α такой, что $\sin\alpha = 0{,}8$ (см. рис.). У вершины склона разрывается фейерверк. Осколки летят во всевозможных направлениях с одинаковыми по модулю скоростями. Наибольшее удаление от поверхности склона осколка, упавшего на склон, $H = 48$ м. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.



1. Найдите начальную скорость V_0 осколков.
2. Найдите модуль S перемещения за время полёта упавшего на склон осколка, наибольшее удаление которого от поверхности склона за время полёта $H = 48$ м.
3. На каком максимальном расстоянии S_{MAX} от точки старта один из осколков упадёт на склон?

▲ **Решение. Что происходит.** Осколки вылетают из вершины с одной скоростью V_0 в разные стороны и летят с ускорением g. Удаление от склона зависит только от составляющей скорости, перпендикулярной склону, поэтому берём оси вдоль склона и поперёк него: ускорение вдоль каждой оси постоянно, падение на склон — возврат поперечной координаты к нулю. Дальше всех от склона уходит осколок, брошенный перпендикулярно склону, а дальше всех по склону — другой (пункт 3).

Обозначения. Ось x — вдоль склона вниз, ось y — перпендикулярно склону вверх. θ — угол между $\vec{V}_0$ и горизонтом, $\beta = \theta + \alpha$ — угол между $\vec{V}_0$ и направлением вниз по склону. По условию $\sin\alpha = 0{,}8$, значит $\cos\alpha = 0{,}6$.



Оси: x вдоль склона вниз, y перпендикулярно склону. Слева — проекции $\vec{V}_0$ (β — угол между $\vec{V}_0$ и склоном, масштаб 1 см = 10 м/с; штриховая линия — горизонт), справа — проекции $\vec{g}$ (1 см ≈ 3,3 м/с^2): вдоль $+x$ вклад $g\sin\alpha$, вдоль $-y$ вклад $g\cos\alpha$.

Пункт 1.

1. Проекции. Начальная скорость: $V_{0x} = V_0\cos\beta$, $V_{0y} = V_0\sin\beta$. Ускорение: $g_x = g\sin\alpha$ (вдоль склона вниз), $g_y = -g\cos\alpha$.

2. Удаление от склона. Поперёк склона осколок движется с постоянным ускорением $-g\cos\alpha$ и в самой высокой от склона точке $v_y = 0$. Для него $0 = V_0^2\sin^2\beta - 2g\cos\alpha\cdot h$, откуда

$$h = \frac{V_0^2\sin^2\beta}{2g\cos\alpha}.$$

Величина h наибольшая при $\sin\beta = 1$, то есть когда $\vec{V}_0$ перпендикулярен склону ($\beta = 90°$, $\theta = 90° - \alpha \approx 37°$). Этот осколок падает на склон (пункт 2), поэтому

$$H = \frac{V_0^2}{2g\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad V_0 = \sqrt{2gH\cos\alpha} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 48\cdot 0{,}6} = 24 \text{ м/с}.$$

Пункт 2.

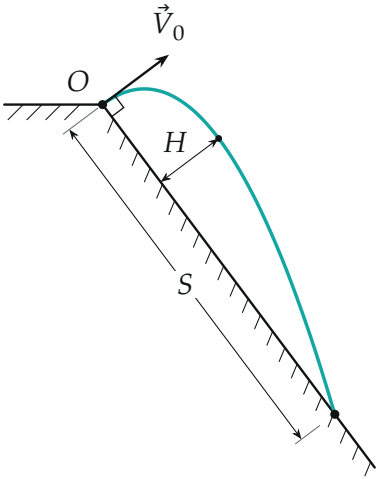
3. Время полёта. Падение на склон — момент $y = 0$. Для осколка с $\beta = 90°$: $V_{0y} = V_0$, $V_{0x} = 0$, и

$$V_0 T - \frac{g\cos\alpha}{2} T^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2V_0}{g\cos\alpha} = \frac{2 \cdot 24}{10 \cdot 0{,}6} = 8 \text{ с}.$$

4. Перемещение вдоль склона. Вдоль x нет начальной скорости, а ускорение $g\sin\alpha$ постоянно:

$$S = \frac{g\sin\alpha}{2} T^2 = \frac{10 \cdot 0{,}8}{2} \cdot 64 = 256 \text{ м}.$$

Поперечная координата в начале и в конце равна нулю, поэтому перемещение лежит вдоль склона и его модуль — это S.



Осколок, брошенный перпендикулярно склону (масштаб 1 см = 50 м). H — наибольшее удаление от склона (точка — середина полёта, $t = T/2$), S — расстояние от точки старта O до точки падения.

Второй способ для S: в горизонтальных и вертикальных осях ($\sin\theta = 0{,}6$, $\cos\theta = 0{,}8$) за $T = 8$ с осколок пролетает $24 \cdot 0{,}8 \cdot 8 = 153{,}6$ м по горизонтали и опускается на 204,8 м. Длина перемещения $\sqrt{153{,}6^2 + 204{,}8^2} = 256$ м, а $204{,}8/153{,}6 = \operatorname{tg}\alpha$: точка лежит на склоне.

Пункт 3.

5. Дальность в общем случае. Время падения осколка с углом β из условия $y = 0$: $T = \dfrac{2V_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}$. Расстояние вдоль склона

$$S = V_0\cos\beta\, T + \frac{g\sin\alpha}{2}T^2 = \frac{2V_0^2\sin\beta}{g\cos^2\alpha}(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)$$
$$= \frac{V_0^2}{g\cos^2\alpha}(\sin(2\beta-\alpha) + \sin\alpha).$$

(использовано $2\sin\beta\cos(\beta-\alpha) = \sin(2\beta-\alpha) + \sin\alpha$).

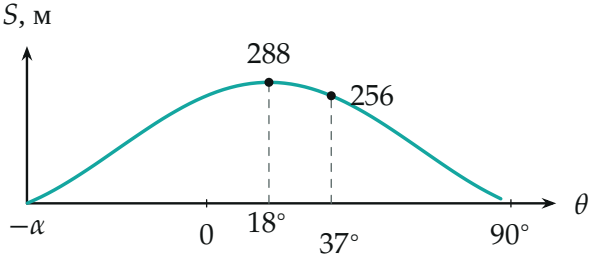
6. Наибольшее значение. Дальность наибольшая при $\sin(2\beta-\alpha) = 1$:

$$2\beta - \alpha = 90^\circ \quad\Rightarrow\quad \beta = \frac{90^\circ+\alpha}{2} \approx 71{,}6^\circ, \qquad \theta = \beta - \alpha \approx 18{,}4^\circ.$$

Вектор $\vec{V}_0$ лежит на биссектрисе угла между склоном (вниз) и вертикалью (вверх). Так как $\cos^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$,

$$S_{\text{MAX}} = \frac{V_0^2(1+\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha} = \frac{V_0^2}{g(1-\sin\alpha)} = \frac{576}{10\cdot 0{,}2} = 288\text{ м}.$$

Обратите внимание: это не осколок из пункта 2: тот ушёл дальше всех от склона, но по склону пролетел только 256 м.



Дальность по склону в зависимости от угла θ между $\vec{V}_0$ и горизонтом (осколки, падающие на склон). Наибольшая дальность 288 м — при $\theta \approx 18^\circ$; осколок из пункта 2 ($\theta \approx 37^\circ$, $\vec{V}_0 \perp$ склону) падает на 256 м.

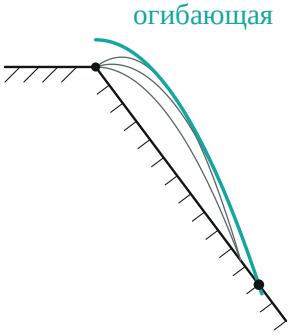
Второй способ (парабола безопасности). Точка (x, y) достижима осколком с углом θ, если $y = xu - \dfrac{gx^2}{2V_0^2}(1+u^2)$, $u = \operatorname{tg}\theta$. Квадратное уравнение для u имеет решение при неотрицательном дискриминанте:

$$y \le \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2} = 28{,}8 - 0{,}00868\,x^2.$$

Склон $y = -x\operatorname{tg}\alpha$ пересекает эту границу в самой дальней точке падения:

$$0{,}00868\,x^2 - \tfrac{4}{3}\,x - 28{,}8 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 172{,}8 \text{ м},$$

$$S_{\text{MAX}} = \frac{x}{\cos\alpha} = 288 \text{ м}.$$



Парабола безопасности (бирюзовая) и траектории при $\theta = 0°, 18°, 37°$ (серые), масштаб 1 см = 80 м. Склон пересекает огибающую в чёрной точке — самой дальней точке падения.

Проверка. Размерность: V_0^2/g — метры. Предел $\alpha \to 0$ (ровная земля): $S_{\text{MAX}} = V_0^2/g$. При $\alpha \to 90°$ (вертикальная стена вниз) $S_{\text{MAX}} \to \infty$: осколок сколь угодно долго летит вдоль стены. Численный перебор углов даёт $S_{\text{MAX}} = 288{,}0$ м при $\theta = 18{,}43°$ и 256,0 м для $\vec{V}_0 \perp$ склону. Смысл: как и вверх по склону, бросать выгодно по биссектрисе угла между склоном и вертикалью.

Ответ. 1) $V_0 = \sqrt{2gH\cos\alpha} = 24$ м/с; 2) $S = 256$ м; 3) $S_{\text{MAX}} = V_0^2/(g(1-\sin\alpha)) = 288$ м.