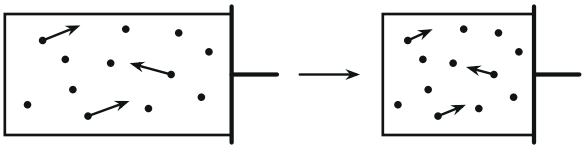
Газ с постоянным числом ударов о стенку

Задача 3. [Физтех 2023/24, 10 класс, варианты 10-05–10-06, задача 3] В процессе сжатия одноатомного идеального газа среднее число соударений атомов газа со стенками в расчёте на единицу площади за единицу времени остаётся постоянным. Внешние силы совершают работу $A = \frac{5}{27}U_0$, здесь $U_0 = 5{,}4$ кДж — внутренняя энергия газа в начальном состоянии.

1. Во сколько m раз уменьшается давление газа в процессе сжатия?
2. Какое количество Q теплоты отведено от газа в процессе сжатия?



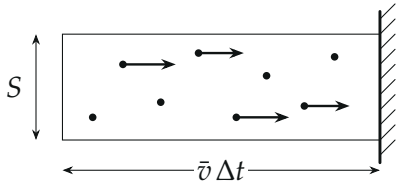
Поясняющий рисунок: тот же газ (12 атомов) до и после сжатия. Атомов в единице объёма больше, а скорости (стрелки) меньше.

▲ **Решение. Что происходит.** Постоянны не давление и не температура, а число ударов о единицу площади стенки за единицу времени. Это число зависит от концентрации атомов и от их скорости, то есть от n и T — от тех же величин, что задают давление. Поэтому условие — скрытое уравнение процесса: переведём его в зависимость $p(V)$. Дальше всё стандартно: работа внешних сил — площадь под графиком $p(V)$, изменение внутренней энергии — по pV, теплота — из первого начала термодинамики. Класс задачи: процесс, заданный не графиком, а физическим условием.

Обозначения. n — концентрация атомов, $\bar{v}$ — их средняя скорость, N — число атомов (не меняется). Индекс 1 — начало сжатия, индекс 2 — конец; $m = p_1/p_2 > 1$. Процесс считаем медленным, давление и температура однородны.

Пункт 1.

1. Число ударов. Возьмём на стенке площадку S и малое время Δt. Долетят до неё те атомы, которые движутся к стенке и находятся от неё не дальше $\bar{v}\Delta t$, то есть лежат в объёме $S\bar{v}\Delta t$.



Выбранный объём $S\bar{v}\Delta t$ у стенки: атомы, летящие вправо, за время Δt успеют удариться.

Их число пропорционально $nS\bar{v}\Delta t$ (доля атомов, летящих к стенке, — постоянное число, потому что направления равноправны). Число ударов на единицу площади за единицу времени:

$$\nu = \frac{\text{число ударов}}{S\,\Delta t} = c\,n\bar{v},$$

где c — число, не зависящее от процесса (в точной теории $c = \frac{1}{4}$). Средняя скорость растёт с температурой: средняя кинетическая энергия атома $\frac{m_0\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}kT$, поэтому $\bar{v} \propto \sqrt{T}$. Условие $\nu = \text{const}$ превращается в

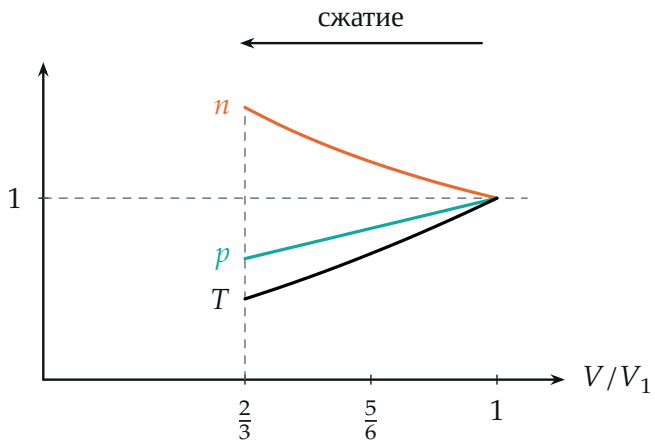
$$n\sqrt{T} = C = \text{const}. \qquad (1)$$

2. Давление и объём. Давление идеального газа $p = nkT$. Из (1): $\sqrt{T} = C/n$, $T = C^2/n^2$, значит

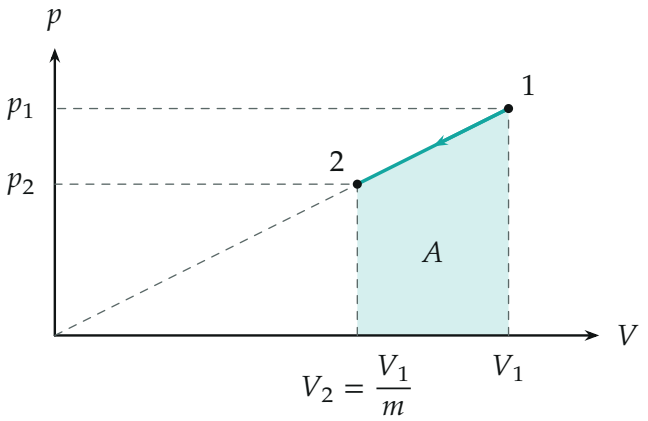
$$p = nk\,\frac{C^2}{n^2} = \frac{kC^2}{n} = \frac{kC^2}{N}\,V, \qquad \text{то есть} \qquad \frac{p}{V} = \text{const}. \qquad (2)$$

На диаграмме (V, p) процесс — участок прямой, проходящей через начало координат. При сжатии давление *уменьшается* вместе с объёмом: атомов в единице объёма больше, но газ настолько холоднее, что они бьют слабее. Из (2) сразу $V_2/V_1 = p_2/p_1 = 1/m$.

Обратите внимание: давление падает при сжатии не вопреки физике, а потому что падает температура: $T \propto pV/N \propto V^2$. Газ охлаждается — от него отводят теплоту (пункт 2).



Как меняются при сжатии от V_1 до $V_2 = \frac{2}{3}V_1$ (в долях начальных значений, по формулам $n \propto 1/V$, $p \propto V$, $T \propto V^2$): концентрация n растёт до $\frac{3}{2}$, давление p падает до $\frac{2}{3}$, температура T — до $\frac{4}{9}$; произведение $n\sqrt{T}$ (пунктир на уровне 1) остаётся постоянным.



Процесс сжатия — участок прямой $p \propto V$ из точки 1 в точку 2. Закрашена площадь под графиком — работа внешних сил.

3. Работа внешних сил. На малом шаге сжатия на $|dV|$ работа внешних сил равна $p\,|dV|$; полная работа — площадь под графиком, трапеция с основаниями p_1, p_2 и высотой $V_1 - V_2$:

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_1 - V_2) = \frac{p_1 V_1}{2}\Big(1 + \frac{1}{m}\Big)\Big(1 - \frac{1}{m}\Big) = \frac{p_1 V_1}{2}\Big(1 - \frac{1}{m^2}\Big).$$

4. Выражаем через U_0. Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV$, поэтому $U_0 = \frac{3}{2}p_1V_1$ и $p_1V_1 = \frac{2}{3}U_0 = 3{,}6$ кДж. Тогда

$$A = \frac{U_0}{3}\Big(1 - \frac{1}{m^2}\Big) = \frac{5}{27}U_0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{m^2} = \frac{5}{9}, \quad \frac{1}{m^2} = \frac{4}{9}, \quad m = \frac{3}{2}.$$

Корень $m > 1$ выбран потому, что газ сжимают. Числами: $A = \frac{5}{27}\cdot 5{,}4 = 1$ кДж.

Пункт 2.

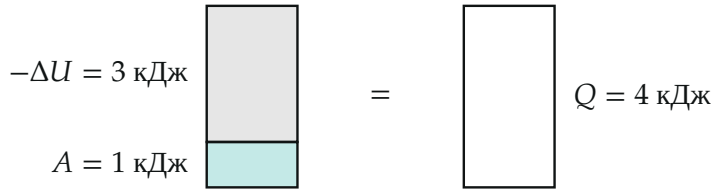
5. Изменение внутренней энергии. Поскольку $U \propto pV \propto V^2$, в конце $U_2 = U_0/m^2 = \frac{4}{9}U_0$, и

$$\Delta U = U_2 - U_0 = -\frac{5}{9}U_0 = -3 \text{ кДж}.$$

6. Первое начало термодинамики. Работа A — это работа внешних сил над газом, поэтому $\Delta U = A + Q_{\text{пол}}$, где $Q_{\text{пол}}$ — теплота, полученная газом. Отсюда

$$Q_{\text{пол}} = \Delta U - A = -\frac{5}{9}U_0 - \frac{5}{27}U_0 = -\frac{20}{27}U_0 = -4 \text{ кДж}.$$

Знак минус: газ теплоту не получает, а отдаёт. Отведённое количество теплоты $Q = -Q_{\text{пол}} = \frac{20}{27}U_0 = 4$ кДж.



Баланс энергии: 1 кДж внесли внешние силы, 3 кДж газ отдал за счёт убыли собственной внутренней энергии — вместе 4 кДж ушло в теплоотвод.

Проверка. Второй способ для Q: на малом шаге $\delta Q_{\text{пол}} = dU + p\,dV$. При $p = \beta V$ (из (2)) $U = \frac{3}{2}\beta V^2$, $dU = 3\beta V\,dV$, и

$$\delta Q_{\text{пол}} = 3\beta V\,dV + \beta V\,dV = 4\beta V\,dV.$$

При сжатии $dV < 0$, поэтому теплота уходит на каждом шаге, а не только в целом. Суммируя от V_1 до V_2: $Q_{\text{пол}} = 2\beta(V_2^2 - V_1^2) = 2(p_2V_2 - p_1V_1) = 2\,(1{,}6 - 3{,}6) = -4$ кДж — как выше. Предел: при $m \to 1$ (газ не сжали) $A \to 0$ и $Q \to 0$. Смысл: из 4 кДж, ушедших в теплоотвод, лишь четверть дали внешние силы, остальное газ отдал сам, охлаждаясь.

Ответ. 1) $m = \dfrac{3}{2}$; 2) $Q = \dfrac{20}{27}U_0 = 4$ кДж (теплота отведена).