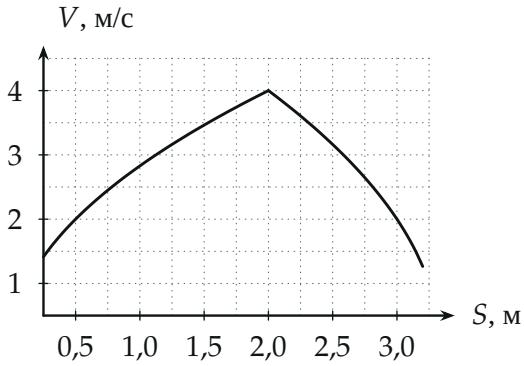
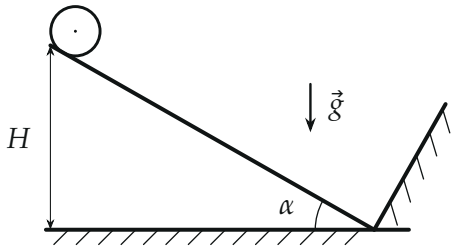
Шайба и обруч на наклонной плоскости

Задача 4. [Физтех 2023/24, 10 класс, варианты 10-05–10-06, задача 4] В первом опыте на шероховатую наклонную плоскость кладут шайбу, которая приходит в движение с нулевой начальной скоростью. Движение шайбы до и после соударения с гладкой стенкой, находящейся у основания наклонной плоскости, происходит вдоль одной и той же прямой. Часть зависимости модуля скорости шайбы от пройденного пути представлена на графике к задаче.



1. Найдите ускорение a, с которым шайба движется в процессе разгона.

Во втором опыте однородный обруч скатывается с той же наклонной плоскости без проскальзывания (см. рис.). Начальная скорость нулевая. Перед абсолютно упругим соударением с гладкой стенкой центр обруча движется со скоростью $V = 4$ м/с.

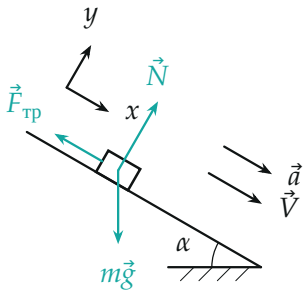


2. Найдите вертикальное перемещение H центра обруча за время движения от старта до столкновения с гладкой стенкой.
3. Через какое время T после столкновения с гладкой стенкой центр обруча будет находиться на максимальной высоте?

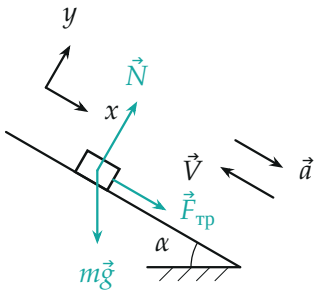
В системе центра масс угловое ускорение обруча при скольжении $\left|\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right| = \frac{\mu g \cos\alpha}{R}$. Коэффициенты трения скольжения шайбы и обруча по наклонной плоскости равны. Радиус обруча $R \ll H$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Шайба в первом опыте — измерительный прибор: график даёт её ускорение при спуске и при подъёме, а с ними и всё, что связано с наклоном и трением — у обруча они те же. Обруч катится без проскальзывания: часть энергии уходит во вращение, поэтому вертикальное перемещение проще найти из энергии. После упругого удара о гладкую стенку скорость центра меняет направление, а вращение остаётся прежним — обруч скользит, и трение скольжения даёт центру то же ускорение, что у шайбы при подъёме. Классы задач: кинематика по графику, энергия при качении, удар с вращением, трение скольжения.

Обозначения. Ось x — вдоль плоскости вниз, ось y — от плоскости перпендикулярно ей. α — угол наклона, μ — коэффициент трения, a и a' — ускорения шайбы при спуске и при подъёме, S — путь шайбы от старта, R — радиус обруча, ω — его угловая скорость.



разгон



после удара, подъём

Шайба на наклонной плоскости. При спуске трение направлено вверх по

склону, при подъёме — вниз; ускорение в обоих случаях направлено вниз по склону.

Пункт 1.

1. Разгон шайбы. Пока шайба идёт вниз, силы постоянны (сила тяжести, реакция опоры, трение скольжения μN), значит, ускорение постоянно, и из состояния покоя $V^2 = 2aS$, где S — путь от старта. Значит, V^2 линейно зависит от S (рисунок ниже). Возьмём точку излома графика — момент удара о стенку: $S = 2{,}0$ м, $V = 4$ м/с:

$$a = \frac{V^2}{2S} = \frac{16}{2 \cdot 2} = 4 \text{ м/с}^2.$$

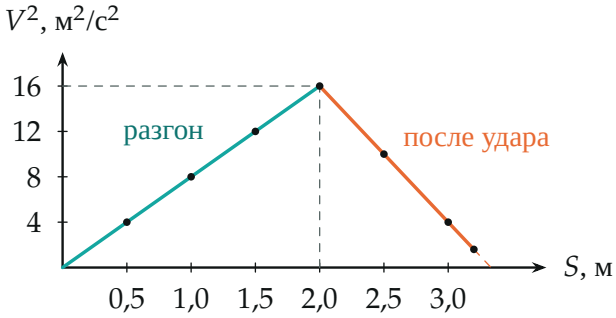


График в координатах V^2 и S: точки — отсчёты по рисунку условия. Разгон — прямая через начало координат с наклоном $2a$, после удара — прямая с наклоном $-2a'$.

2. Подъём после удара. Удар упругий, поэтому скорость сразу после него равна 4 м/с и направлена вверх по склону. Скорость затем падает (V^2 линейно убывает с наклоном $-2a'$); возьмём точку $S = 3{,}0$ м, где $V = 2{,}0$ м/с:

$$a' = \frac{V_{\text{уд}}^2 - V^2}{2\,(S - 2{,}0)} = \frac{16 - 4}{2 \cdot 1} = 6 \text{ м/с}^2.$$

Второй закон Ньютона для шайбы в проекции на ось x при спуске и при подъёме (трение скольжения $\mu N = \mu mg \cos\alpha$ направлено против

скорости, ускорение в обоих случаях — вниз по склону):

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \quad \text{(спуск)},$$
$$ma' = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \quad \text{(подъём)}.$$

Вычтем первое уравнение из второго: $a' - a = 2\mu g\cos\alpha$, откуда

$$\mu g\cos\alpha = \frac{a'-a}{2} = 1\ \text{м/с}^2,$$
$$g\sin\alpha = \frac{a'+a}{2} = 5\ \text{м/с}^2.$$

Запомним $\mu g\cos\alpha = 1$ м/с^2 (нужно в пункте 3); заодно $\alpha = 30°$, $\mu = \sqrt{3}/15$ — для проверки.

Пункт 2.

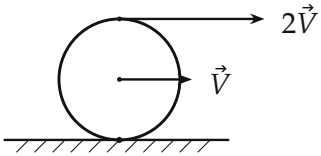
3. Качение обруча без проскальзывания. Точка обруча, которой он касается плоскости, неподвижна: скорость центра V и скорость точки относительно центра ωR направлены в этой точке противоположно, поэтому $V - \omega R = 0$, то есть $\omega R = V$ (рисунок). Трение покоя в точке касания работы не совершает (точка не движется), реакция опоры перпендикулярна перемещению: механическая энергия обруча сохраняется. Момент инерции тонкого обруча $I = mR^2$, поэтому вращательная энергия

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{mR^2}{2}\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{mV^2}{2}$$

равна поступательной: на каждую половину приходится ровно столько же. Закон сохранения энергии от старта (скорость нулевая) до удара:

$$mgH = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mV^2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{V^2}{g} = \frac{16}{10} = 1{,}6\ \text{м}.$$

Радиус $R \ll H$ позволяет не различать, откуда считать высоту. Такое качение требует трения покоя $f = \frac{1}{2}mg\sin\alpha$ ($f/m = 2{,}5$ м/с^2), большего предельного трения скольжения ($\mu g\cos\alpha = 1$ м/с^2): в условии равны только коэффициенты трения *скольжения*, а качение дано как факт.



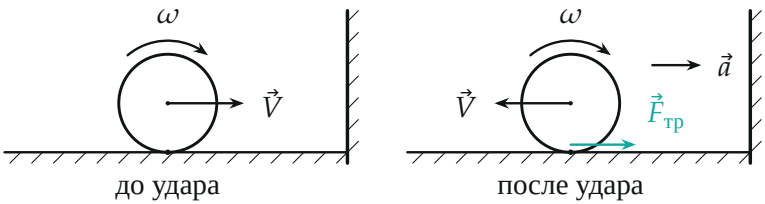
Качение без проскальзывания: скорость центра V, верхней точки $2V$, точки касания 0.

Обратите внимание: ускорение шайбы $a = 4$ м/с^2 для обруча брать нельзя — вращение «отбирает» часть энергии. Второй способ для H: ускорение центра $a_c = \frac{1}{2}g\sin\alpha = 2{,}5$ м/с^2, путь $L = V^2/(2a_c) = 3{,}2$ м, $H = L\sin\alpha = 1{,}6$ м.

Пункт 3.

4. Удар о стенку. Стенка гладкая, поэтому её сила на обруч перпендикулярна стенке и в точке касания направлена вдоль радиуса — через центр обруча. Момент этой силы относительно центра равен нулю, и угловая скорость при ударе не меняется: $\omega R = V = 4$ м/с. По рисунку условия стенка перпендикулярна плоскости (наклоны 30° и 60° к горизонту в разные стороны), удар упругий, поэтому скорость центра сохраняет модуль и меняет направление: $v_x = -V$ (вверх по склону). Трение плоскости за короткий удар не успевает изменить импульс (оно конечно, а сила стенки огромна).

Скорость точки касания вдоль плоскости: $v_x - \omega R = -V - V = -2V = -8$ м/с — обруч проскальзывает вверх по плоскости. Сила трения скольжения на обруч направлена против проскальзывания — вниз по склону, модуль $\mu mg\cos\alpha$.



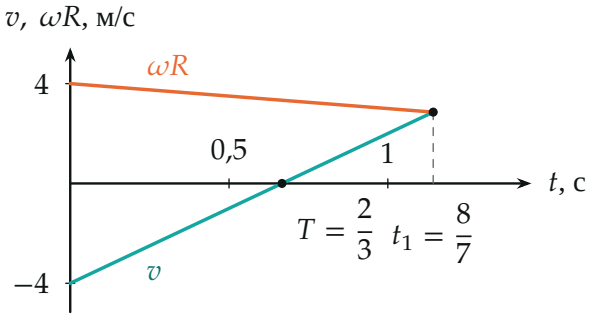
Обруч у стенки (плоскость повёрнута горизонтально). До удара точка касания неподвижна. После удара центр движется от стенки, вращение преж-

нее, точка касания скользит назад со скоростью $2V$; трение и ускорение центра направлены к стенке.

5. Движение центра после удара. Второй закон Ньютона для центра масс обруча в проекции на ось x: $ma_x = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$. Ускорение $a_x = g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha = 5 + 1 = 6$ м/с^2 — то же, что a' у шайбы при подъёме. Центр сначала движется вверх с замедлением, достигает наибольшей высоты, когда $v_x = 0$:

$$v_x = -V + a'\,t = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{V}{a'} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\text{ с} \approx 0{,}67\text{ с}.$$

6. Проскальзывание ещё идёт. Формула $a' = 6$ м/с^2 верна, только пока обруч скользит. Из данного в условии $|\Delta\omega/\Delta t| = \mu g\cos\alpha/R$ получаем $\omega R = V - \mu g\cos\alpha\cdot t = 4 - t$ (трение скольжения тормозит вращение), а скорость центра $v_x = -4 + 6t$. Скольжение прекратится при $v_x = \omega R$: $t_1 = \frac{8}{7}$ с $\approx 1{,}14$ с. Так как $t_1 > T$, к моменту T обруч ещё скользит, и ответ верен.



Скорость центра v и ωR после удара. Центр останавливается в момент $T = 2/3$ с, а скольжение прекращается позже, в $t_1 = 8/7$ с, когда линии сходятся.

Проверка. Размерность: $V^2/(2S)$ — м/с^2, V^2/g — м. Предел $\mu \to 0$: $a' = a$ — как без трения. Второй способ для T: численное интегрирование движения обруча даёт остановку центра при $t = 0{,}6667$ с, конец скольжения — при 1,143 с.

Ответ. 1) $a = 4$ м/с^2; 2) $H = \dfrac{V^2}{g} = 1{,}6$ м; 3) $T = \dfrac{2}{3}$ с $\approx 0{,}67$ с.