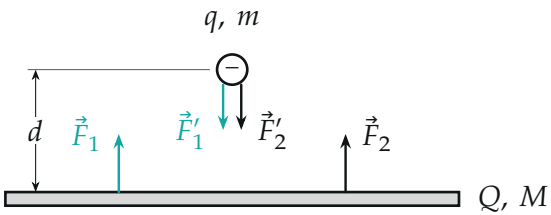
# Шарик у заряженной пластины

**Задача 5.** [Физтех 2023/24, 10 класс, варианты 10-05–10-06, задача 5] Вблизи центра квадратной пластины площадью $S = 0{,}5$ м$^2$, по которой однородно распределён заряд $Q = 8 \cdot 10^{-9}$ Кл, закреплён шарик, заряд которого $q = -3{,}54 \cdot 10^{-9}$ Кл. Масса пластины $M = 4$ кг, масса шарика $m = 12$ г. Расстояние $d$ от шарика до пластины таково, что $d \ll 0{,}7$ м.

1. Найдите кулоновскую силу $F_1$, с которой заряд шарика действует на заряд пластины.
2. Найдите гравитационную силу $F_2$, с которой шарик действует на пластину.

Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл$^2$/(Н·м$^2$).




*Поясняющий рисунок (вид сбоку, не в масштабе): пластина и шарик притягиваются и электрически ($\vec{F}_1$, $\vec{F}'_1$), и гравитационно ($\vec{F}_2$, $\vec{F}'_2$). Длины стрелок условны: на деле $F_1 \gg F_2$.*

▲ **Решение.** **Что происходит.** Обе силы — силы взаимодействия двух тел. По третьему закону Ньютона сила, с которой шарик действует на пластину, равна по модулю силе, с которой пластина действует на шарик. Поэтому проще искать силы, действующие на шарик, — через поле пластины. Расстояние $d$ много меньше размера пластины (сторона $\sqrt{S} \approx 0{,}7$ м), поэтому вблизи центра пластина для шарика — бесконечная равномерно заряженная (и равномерно «тяжёлая») плоскость. Поле такой плоскости не зависит от расстояния до неё, потому и $d$ в условии числом не задано. И электрическое, и гравитационное притяжение подчиняются закону обратных квадратов, поэтому поле плоскости в обоих

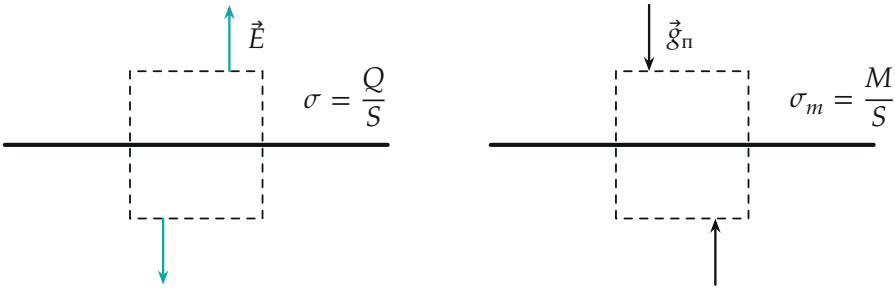
случаях выводится одной и той же теоремой Гаусса. Класс задачи: поле бесконечной плоскости + третий закон Ньютона.

**Обозначения.** $\sigma = Q/S$ — поверхностная плотность заряда, $\sigma_m = M/S$ — поверхностная плотность массы; $E$ — напряжённость электрического поля пластины, $g_\text{п}$ — ускорение, которое создаёт гравитационное поле пластины. Шарик считаем точечным, пластину — тонкой.

**Пункт 1.**

**1. Поле заряженной плоскости.** Окружим малую часть пластины замкнутой поверхностью — цилиндром с площадью основания $\Delta S$, ось которого перпендикулярна пластине, а основания лежат по обе стороны от неё на малом по сравнению с размером пластины расстоянии. По симметрии поле перпендикулярно плоскости и одинаково по модулю по обе стороны, направлено от плоскости (заряд положителен). Через боковую поверхность поток равен нулю: поле ей параллельно. Через два основания поток равен $2E\,\Delta S$. Заряд внутри цилиндра — $\sigma\,\Delta S$. Теорема Гаусса: поток поля через замкнутую поверхность равен заряду внутри, делённому на $\varepsilon_0$:

$$2E\,\Delta S = \frac{\sigma\,\Delta S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$




электрическое поле гравитационное поле

*Цилиндр Гаусса (пунктир) вокруг малого участка пластины, вид сбоку. Слева поле направлено от пластины, справа — к ней; в обоих случаях поле одинаково по обе стороны.*

**2. Сила на шарик и третий закон Ньютона.** Сила, с которой пластина действует на шарик, по модулю равна $|q|E$. Силу, с которой шарик действует на пластину, по третьему закону Ньютона находим из равенства модулей: $F_1 = |q|E$. Заряды противоположны по знаку, поэтому это притяжение. Подставим числа:

$$F_1 = \frac{|q|\,Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{3{,}54\cdot 10^{-9}\cdot 8\cdot 10^{-9}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}5} = \frac{28{,}32\cdot 10^{-18}}{8{,}85\cdot 10^{-12}} = 3{,}2\cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$

Обратите внимание: $F_1$ не зависит от $d$. Закон Кулона $\dfrac{|q|Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$ здесь не годится: пластина — не точечный заряд, а $d$ ещё и не дано.

**Пункт 2.**

**3. Гравитационное поле плоскости.** Закон тяготения $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$ устроен как закон Кулона $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2}$: достаточно заменить $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ на $G$, заряд на массу, и поменять знак (массы всегда притягиваются). Теорема Гаусса для тяготения: поток вектора $\vec{g}$ через замкнутую поверхность равен $-4\pi G$, умноженному на массу внутри. Для того же цилиндра поток равен $-2g_{\text{п}}\Delta S$ (поле направлено к пластине, внутрь цилиндра), масса внутри — $\sigma_m \Delta S$:

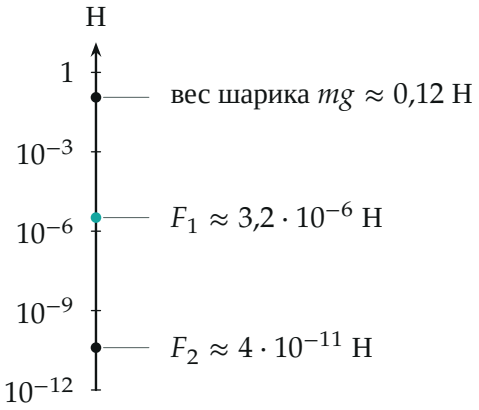
$$2g_{\text{п}}\,\Delta S = 4\pi G\,\sigma_m\,\Delta S \quad\Rightarrow\quad g_{\text{п}} = 2\pi G\sigma_m = \frac{2\pi GM}{S}.$$

Это ускорение — тоже не зависит от расстояния до пластины.

**4. Сила.** Сила, с которой пластина действует на шарик, — $mg_{\text{п}}$; по третьему закону Ньютона шарик действует на пластину с такой же по модулю силой:

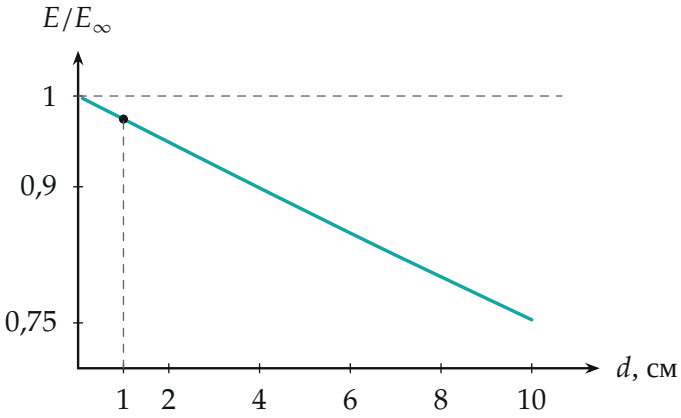
$$F_2 = mg_{\text{п}} = \frac{2\pi GMm}{S} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4\cdot 0{,}012}{0{,}5} \approx 4{,}0\cdot 10^{-11}\ \text{Н}.$$

Масса шарика — $m = 12$ г $= 0{,}012$ кг, в килограммы переведена.




*Силы на логарифмической шкале: электрическое притяжение шарика к пластине в $8 \cdot 10^4$ раз больше гравитационного, а гравитация шарика и пластины ничтожна даже рядом с весом шарика.*

**Проверка.** Размерность: $G \cdot M \cdot m/S$ — (Н·м$^2$/кг$^2$)·кг$^2$/м$^2$ = Н; $|q|Q/(\varepsilon_0 S)$ — Кл$^2$ делить на Кл$^2$/(Н·м$^2$)·м$^2$ = Н. Второй способ — оценка условия «$d \ll 0{,}7$ м». Поле конечной квадратной пластины на оси над центром отличается от поля бесконечной плоскости множителем $\dfrac{E}{E_\infty} = \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{S}{4d\sqrt{d^2+S/2}}$ (то же для тяготения): при $d = 1$ см он равен 0,975, при $d = 5$ мм — 0,987. Значит, при расстояниях в миллиметры и сантиметры ответы верны с точностью до нескольких процентов, а при $d \to 0$ точно. Предел: если бы пластина была бесконечной, множитель равнялся бы 1 при любом $d$.




*Отношение поля квадратной пластины ($S = 0{,}5$ м$^2$) на оси над центром к полю бесконечной плоскости. Точка — $d = 1$ см. Ось ординат начинается с 0,7.*

Смысл: плоскость создаёт поле, которое не зависит от расстояния, поэтому две силы — числа, и для их вычисления не нужно знать $d$.

**Ответ.** 1) $F_1 = \dfrac{|q|Q}{2\varepsilon_0 S} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-6}$ Н (притяжение); 2) $F_2 = \dfrac{2\pi GMm}{S} \approx 4{,}0 \cdot 10^{-11}$ Н (притяжение).