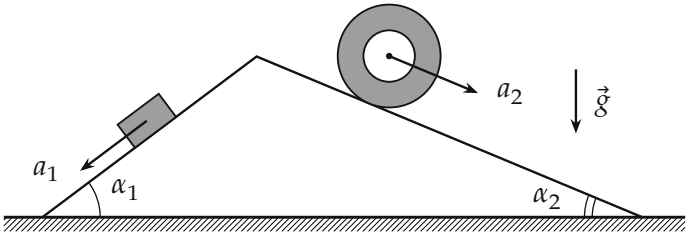
Брусок и цилиндр на клине

Задача 1. [Физтех 2023/24, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 1] С клина, находящегося на шероховатом горизонтальном столе, соскальзывает брусок массой m с ускорением $a_1 = \dfrac{5g}{13}$ и скатывается без проскальзывания полый цилиндр массой $4m$ с ускорением $a_2 = \dfrac{5g}{24}$ (см. рис.). Клин остаётся в покое. Углы наклона поверхностей клина к горизонту α_1 ($\sin\alpha_1 = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha_1 = \frac{4}{5}$) и α_2 ($\sin\alpha_2 = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha_2 = \frac{12}{13}$). Направления всех движений лежат в одной вертикальной плоскости.



1. Найдите силу трения F_1 между бруском и клином.
2. Найдите силу трения F_2 между цилиндром и клином.
3. Найдите силу трения F_3 между столом и клином.

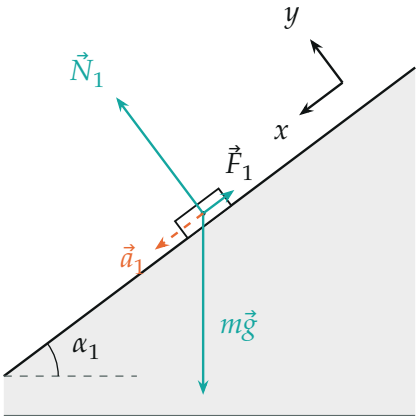
Каждый ответ выразить через m и g с числовым коэффициентом в виде обыкновенной дроби.

▲ **Решение. Что происходит.** Брусок скользит по левой грани, цилиндр катится по правой. Оба разгоняются под действием тяжести, а клин стоит. Ускорения тел заданы, поэтому второй закон Ньютона вдоль склона сразу даёт силы трения F_1 и F_2. Стол действует на клин горизонтальной силой трения F_3, и найти её проще всего для системы «клин + брусок + цилиндр»: клин неподвижен, поэтому импульс системы меняют только брусок и цилиндр, а внешняя горизонтальная сила у системы одна — сила трения стола.

Обозначения. N_1, N_2 — нормальные реакции склонов, F_1, F_2 — силы трения на брусок и на цилиндр (они направлены вдоль склонов), $\vec{F}_3$

— сила трения стола на клин. Ось x в каждом пункте выбираем вдоль склона вниз: ускорение лежит на этой оси, а нормальная реакция на неё не проецируется.

Пункт 1. 1. Силы на брусок. На брусок действуют тяжесть $m\vec{g}$, нормальная реакция $\vec{N}_1$ и сила трения $\vec{F}_1$. Брусок скользит вниз, поэтому трение скольжения направлено против скорости, то есть вверх вдоль склона.



Брусок на левой грани: силы (бирюзовые, длины по расчёту) и ускорение $\vec{a}_1$ (морковный пунктир, длина условная).

2. Второй закон Ньютона для бруска в проекции на ось x (вдоль склона вниз):

$$mg\sin\alpha_1 - F_1 = ma_1.$$

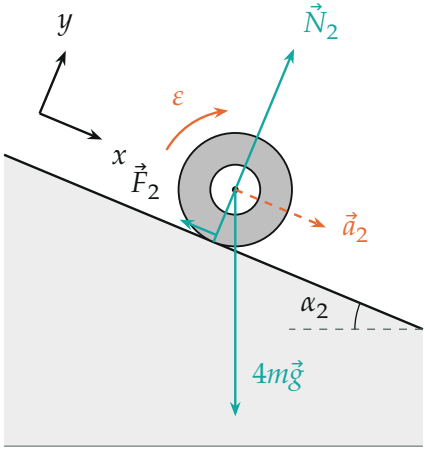
Отсюда

$$F_1 = mg\cdot\frac{3}{5} - m\cdot\frac{5g}{13} = \frac{39-25}{65}mg = \frac{14}{65}mg.$$

Знак «плюс»: трение действительно направлено вверх по склону, и ускорение $\frac{5}{13}g \approx 0{,}38\,g$ меньше $g\sin\alpha_1 = 0{,}6\,g$ — как и должно быть при трении.

Пункт 2. 3. Силы на цилиндр. Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому его точка касания с клином в данный момент неподвижна, а трение здесь — сила трения покоя. Она направлена вверх вдоль склона и создаёт момент, который раскручивает цилиндр; формула $F = \mu N$

неприменима (коэффициент трения не задан, а покой не означает предельное значение).



Цилиндр на правой грани: тяжесть $4m\vec{g}$ приложена в центре, $\vec{N}_2$ и $\vec{F}_2$ — в точке касания; $\vec{\varepsilon}$ — угловое ускорение (по часовой стрелке).

4. Второй закон Ньютона для центра цилиндра в проекции на ось x вдоль склона вниз (она не пропускает N_2 и не требует знать момент инерции):

$$4mg\sin\alpha_2 - F_2 = 4ma_2.$$

Отсюда

$$F_2 = 4mg\cdot\frac{5}{13} - 4m\cdot\frac{5g}{24} = \left(\frac{20}{13} - \frac{5}{6}\right)mg = \frac{120-65}{78}mg = \frac{55}{78}mg.$$

Знак «плюс»: трение направлено вверх по склону.

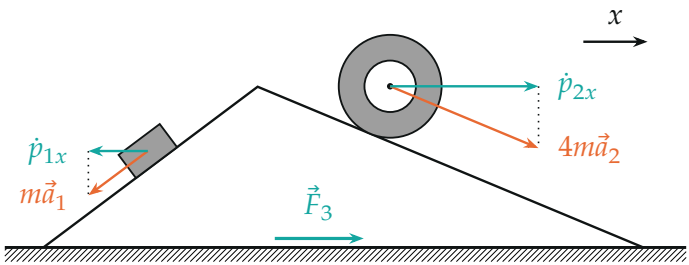
Пункт 3. 5. Что меняет импульс системы. Берём систему «клин + брусок + цилиндр». Внешние силы: три силы тяжести и нормальная реакция стола (все вертикальны) и сила трения стола $\vec{F}_3$ (горизонтальна). Силы между клином и телами — внутренние, их знать не нужно. В проекции на горизонтальную ось x, направленную вправо (туда, куда катится цилиндр), закон изменения импульса системы для малого проме-

жутка Δt имеет вид

$$F_3\,\Delta t = \Delta p_x \quad\Longleftrightarrow\quad F_3 = \frac{\Delta p_x}{\Delta t},$$

где Δp_x — изменение горизонтальной проекции импульса системы.

6. Откуда берётся Δp_x. Клин неподвижен, его импульс не меняется. Скорость бруска растёт на $a_1\Delta t$ вдоль левого склона, то есть влево-вниз, а скорость цилиндра растёт на $a_2\Delta t$ вдоль правого склона, вправо-вниз. Горизонтальные проекции этих приращений: $-a_1\cos\alpha_1\,\Delta t$ и $+a_2\cos\alpha_2\,\Delta t$.



Скорости роста импульса тел: $m\vec a_1$ и $4m\vec a_2$ (морковные) и их горизонтальные проекции $\dot p_{1x} < 0$, $\dot p_{2x} > 0$ (бирюзовые). Сила $\vec F_3$ равна сумме этих проекций.

Тогда $\Delta p_x = (-m\,a_1\cos\alpha_1 + 4m\,a_2\cos\alpha_2)\Delta t$, и

$$F_3 = 4m\,a_2\cos\alpha_2 - m\,a_1\cos\alpha_1 = 4m\cdot\frac{5g}{24}\cdot\frac{12}{13} - m\cdot\frac{5g}{13}\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{10}{13}\,mg - \frac{4}{13}\,mg = \frac{6}{13}\,mg.$$

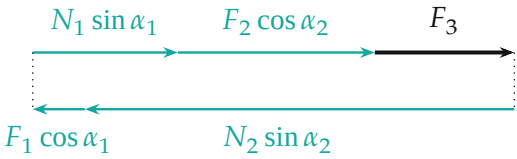
Знак «плюс»: сила трения стола направлена вправо — туда, куда набирает импульс тяжёлый цилиндр. Клин при этом не скользит: стол «подставляет» горизонтальную силу, которой клину недостаёт.

Обратите внимание: F_3 — сила трения покоя клина о стол, поэтому μN здесь тоже не нужна, а нормальные реакции N_1, N_2 и силы F_1, F_2 при таком выборе системы вообще не входят в закон: они внутренние.

7. Второй способ: силы, действующие на клин. Проверим F_3 напрямую, составив условие покоя самого клина. Брусок и цилиндр действуют на него силами, равными по модулю и противоположными по направлению силам $\vec{N}_1$, $\vec{F}_1$ и $\vec{N}_2$, $\vec{F}_2$. Перпендикулярно склону тела не ускоряются, поэтому $N_1 = mg\cos\alpha_1 = \frac{4}{5}mg$ и $N_2 = 4mg\cos\alpha_2 = \frac{48}{13}mg$. Горизонтальные проекции сил на клин:

$$\text{вправо:}\quad N_1\sin\alpha_1 = \frac{12}{25}mg, \qquad F_2\cos\alpha_2 = \frac{110}{169}mg,$$
$$\text{влево:}\quad F_1\cos\alpha_1 = \frac{56}{325}mg, \qquad N_2\sin\alpha_2 = \frac{240}{169}mg.$$

Клин покоится: $F_3 + \frac{12}{25}mg + \frac{110}{169}mg = \frac{56}{325}mg + \frac{240}{169}mg$, откуда снова $F_3 = \frac{6}{13}mg$.



Горизонтальные проекции сил, действующих на клин: суммарная длина стрелок вправо равна суммарной длине стрелок влево.

Проверка. Размерность: все ответы — доли mg, то есть силы. Предельный случай: без трения на бруске было бы $a_1 = g\sin\alpha_1$, и формула $F_1 = m(g\sin\alpha_1 - a_1)$ даёт нуль, как и надо. Второй способ для F_2: уравнение вращения цилиндра $F_2R = I\varepsilon$ с $\varepsilon = a_2/R$ даёт момент инерции $I = F_2R^2/a_2 = \frac{11}{13}\cdot 4mR^2$: он лежит между $\frac{1}{2}MR^2$ (сплошной цилиндр) и MR^2 (тонкая труба), то есть заданное a_2 соответствует цилиндру с толстыми стенками — ответ физически возможен. Для F_3 два способа (импульс системы и условие покоя клина) совпали. Смысл: на клин действует и тянущее вправо, и тянущее влево, но тяжёлый цилиндр сообщает горизонтальному импульсу вправо больше, чем брусок влево, и разность гасит трение стола.

Ответ. 1) $F_1 = \dfrac{14}{65}mg$; 2) $F_2 = \dfrac{55}{78}mg$; 3) $F_3 = \dfrac{6}{13}mg$ (направлена вправо, в сторону движения цилиндра).