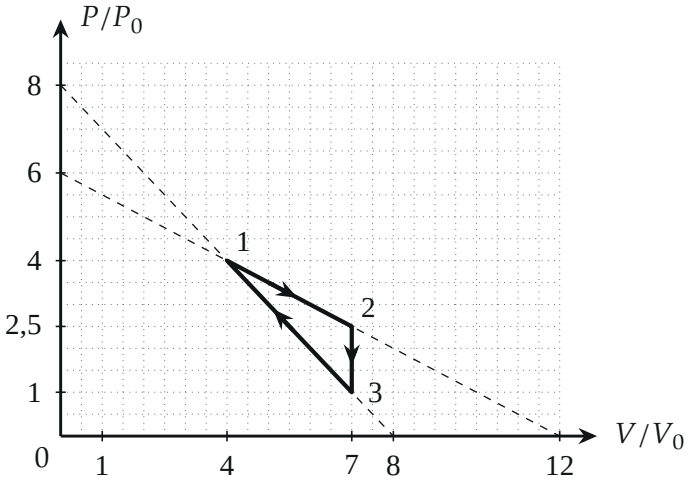
Цикл одноатомного газа

Задача 2. [Физтех 2023/24, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 2] С идеальным одноатомным газом совершают циклический процесс 1-2-3-1. На рисунке представлена зависимость P/P_0 от V/V_0. Здесь V и P — объём и давление газа, V_0 и P_0 — некоторые неизвестные объём и давление.



1. Найдите отношение модуля приращения внутренней энергии газа в процессе 2-3 к работе газа за цикл.
2. Найдите отношение максимальной температуры газа в процессе 1-2 к температуре газа в состоянии 1.
3. Найдите КПД цикла.

Ответы выразите числом в виде обыкновенной дроби или целого числа.

▲ **Решение. Что происходит.** Количество газа постоянно, поэтому температура пропорциональна произведению PV, а внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV$. Работа за цикл — площадь внутри цикла; процесс 2-3 изохорный, так что ΔU там считается по двум состояниям. Максимум температуры на прямой 1-2 — максимум PV вдоль

неё. КПД — это работа цикла, делённая на теплоту, которую газ *получил*, а на наклонных отрезках газ может получать теплоту на одной части и отдавать на другой, поэтому нужно найти, где знак теплообмена меняется.

Обозначения. Единицы: $x = V/V_0$, $y = P/P_0$, PV — в P_0V_0. Из графика: состояние $1(4;\,4)$, $2(7;\,2{,}5)$, $3(7;\,1)$. Пунктиры — продолжения прямых 1-2 и 3-1 до осей: прямая 1-2 проходит через $(0;\,6)$ и $(12;\,0)$, прямая 3-1 — через $(0;\,8)$ и $(8;\,0)$:

$$\text{1-2:}\quad y = 6 - \frac{x}{2}, \qquad\qquad \text{3-1:}\quad y = 8 - x.$$

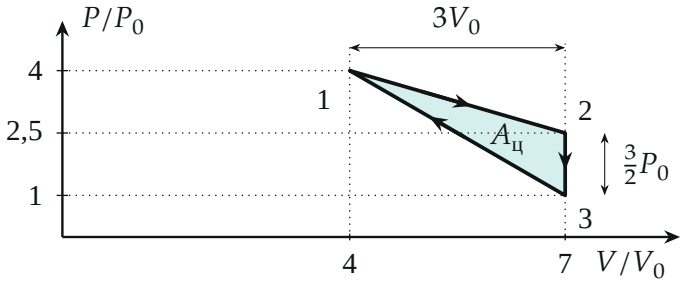
Пункт 1. 1. Приращение внутренней энергии в процессе 2-3. Процесс изохорный (V постоянен), газ охлаждается: давление падает с 2,5 до 1. Внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}PV$:

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\,(P_3V_3 - P_2V_2) = \frac{3}{2}\,(7 - 17{,}5)\,P_0V_0 = -\frac{63}{4}\,P_0V_0.$$

Знак «минус»: внутренняя энергия уменьшилась.

2. Работа за цикл. Цикл идёт по часовой стрелке ($1 \to 2$ — расширение при большом давлении, $3 \to 1$ — сжатие при малом), поэтому работа газа положительна и равна площади треугольника. Сторона 2-3 вертикальна и имеет длину $(2{,}5-1)P_0 = \frac{3}{2}P_0$, а расстояние от вершины 1 до этой стороны по оси объёма равно $(7-4)V_0 = 3V_0$:

$$A_{\text{ц}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}P_0\cdot 3V_0 = \frac{9}{4}\,P_0V_0.$$



Цикл по часовой стрелке; площадь закрашенного треугольника равна работе газа за цикл.

Отношение:

$$\frac{|\Delta U_{23}|}{A_{\text{ц}}} = \frac{63/4}{9/4} = 7.$$

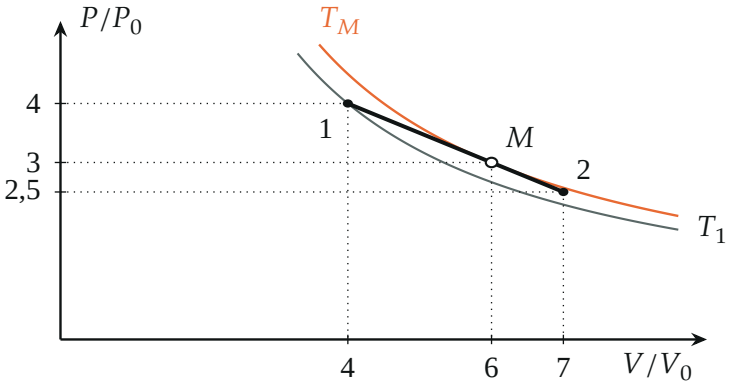
Пункт 2. 3. Температура вдоль 1-2. Так как $T \propto PV$, на отрезке 1-2 с $y = 6 - \frac{x}{2}$

$$PV = \left(6 - \frac{x}{2}\right)x = 6x - \frac{x^2}{2} \quad \text{(в единицах } P_0V_0\text{)}.$$

Это парабола ветвями вниз: максимум там, где производная $6 - x$ равна нулю, то есть при $x = 6$. Эта точка лежит внутри отрезка ($4 < 6 < 7$), значит максимум достигается на самом отрезке, и в нём $PV = 36 - 18 = 18$. В состоянии 1: $PV = 4 \cdot 4 = 16$. Тогда

$$\frac{T_{\max}}{T_1} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}.$$

Геометрически то же самое: в точке $M(6;\ 3)$ гипербола $PV = 18$ (изотерма) *касается* прямой 1-2; все остальные точки прямой лежат на более холодных изотермах.



Изотермы $PV = \text{const}$: серая — T_1 ($PV = 16$), морковная — T_M ($PV = 18$); она касается прямой 1-2 в точке $M(6;\,3)$.

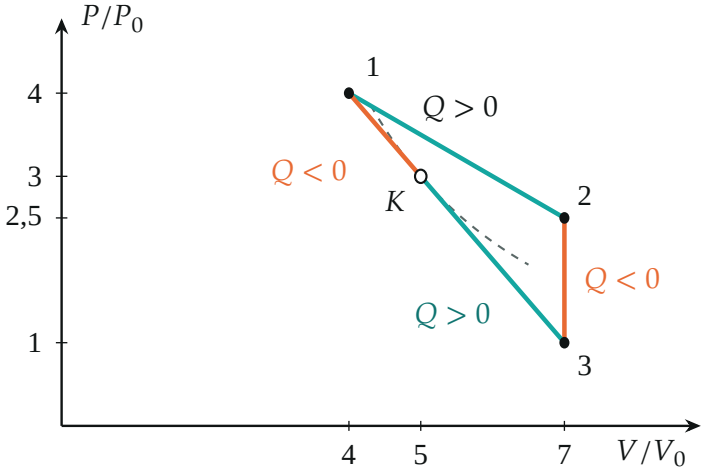
Пункт 3. 4. Где газ получает теплоту. КПД $\eta = A_\text{ц}/Q_+$, где Q_+ — вся теплота, *полученная* газом за цикл. Для процесса на прямой $y = a - bx$ запишем первое начало термодинамики для малого шага: $\delta Q = dU + P\,dV$, где $U = \frac{3}{2}PV$. Тогда

$$\delta Q = \frac{3}{2}\,d(PV) + P\,dV = \frac{5}{2}\,P\,dV + \frac{3}{2}\,V\,dP, \qquad dP = -b\,dV,$$

$$\delta Q = \Big(\frac{5}{2}a - 4bx\Big)\,dV \qquad (\text{единицы } P_0V_0).$$

Знак δQ определяют два множителя. На 1-2 ($a = 6$, $b = \frac{1}{2}$): $\delta Q = (15 - 2x)\,dV$. При расширении $dV > 0$, а $15 - 2x > 0$ при всех $x \le 7$, поэтому на всём отрезке 1-2 газ получает теплоту. На 3-1 ($a = 8$, $b = 1$): $\delta Q = (20 - 4x)\,dV = -4(x - 5)\,dV$. Газ идёт от $x = 7$ к $x = 4$, то есть $dV < 0$: пока $x > 5$, множитель $-4(x - 5)$ отрицателен и произведение положительно — газ получает теплоту; при $x < 5$ он её отдаёт. Точка смены знака — $K(5;\,3)$. На 2-3 объём постоянен, $\delta Q = dU < 0$: газ отдаёт теплоту.

Геометрически точка K — это место, где адиабата $PV^{5/3} = \text{const}$ касается прямой 3-1: наклон адиабаты $-\frac{5}{3}\frac{P}{V} = -\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5} = -1$ равен наклону прямой.



Бирюзовые участки — газ получает теплоту, морковные — отдаёт; в точке $K(5;\,3)$ адиабата (пунктир) касается прямой 3-1.

5. Теплота, полученная газом. Участок 1-2: первое начало $Q = \Delta U + A$ для конечного участка. Здесь $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}(17{,}5 - 16) = \frac{9}{4}$, а работа газа — площадь трапеции под прямой: $A_{12} = \frac{1}{2}(4 + 2{,}5) \cdot 3 = \frac{39}{4}$. Теплота

$$Q_{12} = \frac{9}{4} + \frac{39}{4} = 12.$$

Участок 3-K (x от 7 до 5, газ сжимается, работа газа отрицательна): $\Delta U_{3K} = \frac{3}{2}(15 - 7) = 12$, $A_{3K} = -\frac{1}{2}(1 + 3) \cdot 2 = -4$,

$$Q_{3K} = 12 - 4 = 8.$$

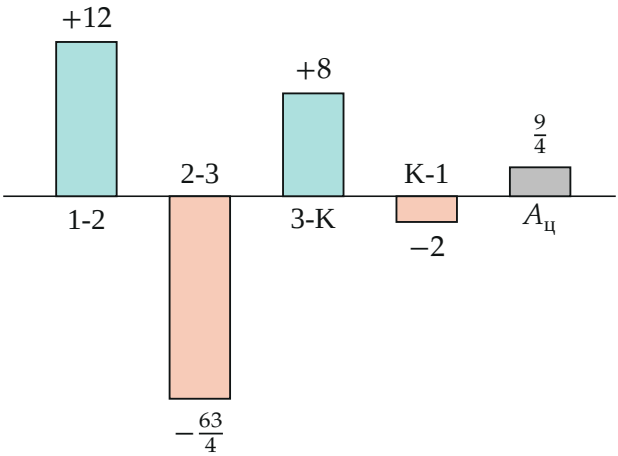
Знак «плюс»: хотя газ сжимается, внутренняя энергия растёт быстрее, чем газ отдаёт её в виде работы, и недостающее приходит теплотой. Полученная за цикл теплота $Q_+ = Q_{12} + Q_{3K} = 20\,P_0V_0$. Тогда

$$\eta = \frac{A_\text{ц}}{Q_+} = \frac{9/4}{20} = \frac{9}{80}.$$

Обратите внимание: в знаменатель КПД идёт только полученная теплота Q_+. Если взять по модулю всю теплоту на 3-1 (или теплоту всего

цикла), получится другое, неверное число.

Проверка. Размерность: все ответы — безразмерные отношения. Второй способ для теплот: на оставшихся участках $\Delta U_{23} = Q_{23} = -\frac{63}{4}$, а на участке К-1 $\Delta U = \frac{3}{2}(16-15) = \frac{3}{2}$, $A = -\frac{1}{2}(3+4)\cdot 1 = -\frac{7}{2}$, $Q_{K1} = -2$. Сумма по циклу $12 - \frac{63}{4} + 8 - 2 = \frac{9}{4}$ — это работа цикла, как требует первое начало для замкнутого процесса. Ещё одна оценка: наибольшая температура цикла ($PV = 18$) и наименьшая ($PV = 7$ в состоянии 3) дали бы КПД Карно $1 - \frac{7}{18} \approx 0{,}61$, а найденный $\frac{9}{80} \approx 0{,}11$ заметно меньше, как и должно быть. Смысл: газ получает 20 единиц теплоты, но в работу превращается лишь $\frac{9}{4}$ — остальное уходит в холодильник на участках 2-3 и К-1.



Теплота на участках в единицах P_0V_0: сумма всех четырёх равна работе за цикл $A_ц = \frac{9}{4}$.

Ответ. 1) 7; 2) $\frac{9}{8}$; 3) $\eta = \frac{9}{80}$.