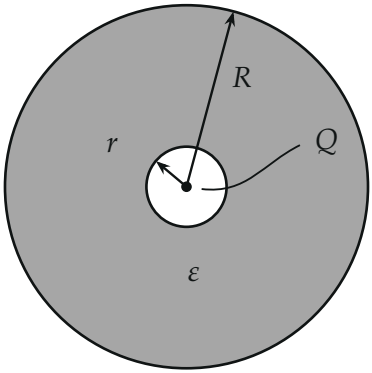
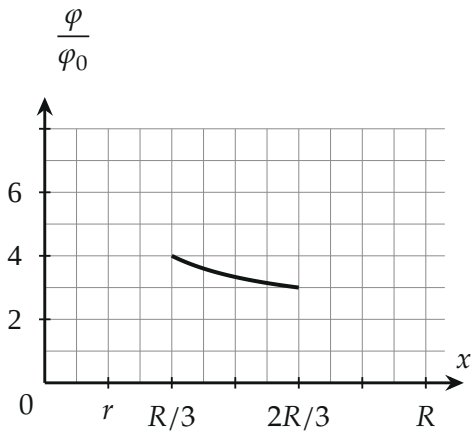
Полый диэлектрический шар с зарядом

Задача 3. [Физтех 2023/24, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 3] В центре полого шара с диэлектрической проницаемостью ε и радиусами поверхностей r и R находится шарик с зарядом Q (см. рис.). Известна графическая зависимость потенциала φ электрического поля внутри диэлектрика от расстояния x от центра полого шара в интервале изменений x от $R/3$ до $2R/3$ (см. рис.). Здесь φ_0 — потенциал в некоторой точке вне шара. Потенциал в бесконечно удалённой точке принят равным нулю.



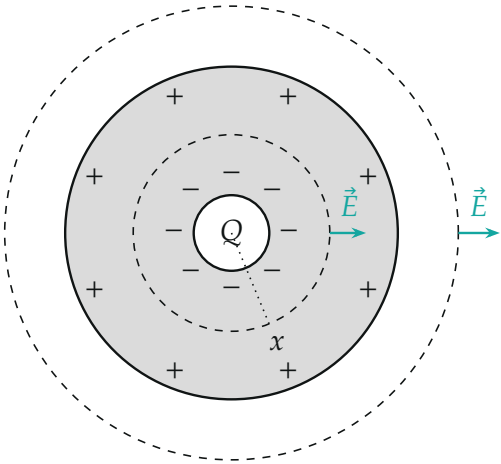


1. Считая известными r, R, Q, ε, найдите аналитическое выражение (в виде формулы) для потенциала внутри диэлектрика при $x = R/4$.

2. Используя график, найдите численное значение ε.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Заряд Q поляризует диэлектрик: на поверхности у полости появляется связанный заряд $-q'$, на внешней поверхности $+q'$, в сумме они дают нуль. Поэтому вне шара поле такое же, как у одного заряда Q, а внутри диэлектрика оно ослаблено в ε раз. Потенциал внутри найдём от границы $x = R$, где он известен, интегрируя поле. Второй пункт: отношение двух значений потенциала с графика не зависит ни от Q, ни от R, ни от неизвестного φ_0 — в него войдёт только ε. Класс задачи: поле и потенциал в диэлектрике, склейка на границе.

Обозначения. x — расстояние от центра; $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; $\varphi(\infty) = 0$; q' — модуль связанного заряда на каждой из двух поверхностей диэлектрика. Из сетки графика читаем, что метка r стоит на второй клетке, а R — на двенадцатой, то есть $r = R/6 < R/4$: точка $x = R/4$ лежит внутри диэлектрика.



Сечение шара. Знаки «−» — связанный заряд $-q'$ на поверхности у полости, «+» — заряд $+q'$ на внешней поверхности. Пунктиром показаны замкнутые сферы для теоремы Гаусса: радиуса x внутри диэлектрика и радиуса больше R снаружи.

Пункт 1. 1. Поле и потенциал вне шара. Теорема Гаусса для сферы радиуса $x > R$: внутри неё заряд $Q + (-q') + q' = Q$, поэтому $E = \dfrac{kQ}{x^2}$

и, так как потенциал на бесконечности равен нулю,

$$\varphi(x) = \frac{kQ}{x} \quad (x \geq R), \qquad \varphi(R) = \frac{kQ}{R}.$$

Потенциал непрерывен на границе: поле конечно, значит скачка потенциала нет. Этим значением мы воспользуемся как опорным.

2. Поле внутри диэлектрика. Теорема Гаусса для сферы радиуса x внутри диэлектрика ($r < x < R$): внутри неё заряд $Q - q'$. По определению проницаемости, поле заряда Q в диэлектрике слабее в ε раз, то есть

$$E(x) \cdot 4\pi x^2 = \frac{Q - q'}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E(x) = \frac{kQ}{\varepsilon x^2}.$$

Это значит, что $Q - q' = \dfrac{Q}{\varepsilon}$ и $q' = Q\Big(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\Big)$. Знак: поле направлено от заряда Q (радиально наружу), $E > 0$.

3. Потенциал внутри диэлектрика. Разность потенциалов между точкой x и границей R — это работа поля по переносу единичного заряда от x до R:

$$\varphi(x) - \varphi(R) = \int_x^R E\,dx' = \frac{kQ}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\Big).$$

Знак: для $x < R$ правая часть положительна — потенциал растёт к центру, как и должно быть у положительного заряда. С учётом $\varphi(R) = kQ/R$:

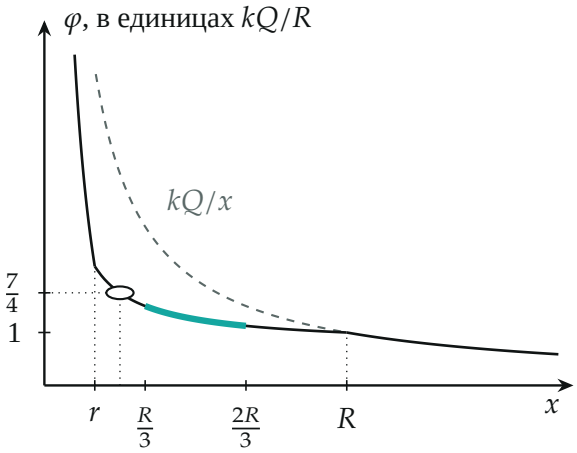
$$\varphi(x) = \frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{\varepsilon}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\Big) = \frac{kQ}{\varepsilon R}\Big(\varepsilon - 1 + \frac{R}{x}\Big).$$

При $x = R/4$ получаем $\dfrac{R}{x} = 4$, откуда

$$\varphi\Big(\frac{R}{4}\Big) = \frac{kQ}{\varepsilon R}\,(\varepsilon + 3).$$

Обратите внимание: множитель $1/\varepsilon$ стоит только перед *разностью* потенциалов, а опорное значение $\varphi(R) = kQ/R$ берётся без ε: связанные заряды в сумме нейтральны и вне шара поле не меняют. Запись

$\varphi = kQ/(\varepsilon x)$ была бы ошибкой — она даёт $\varphi(R) = kQ/(\varepsilon R)$ и разрыв потенциала на границе.



Потенциал во всех областях при $\varepsilon = 4$, $r = R/6$. Бирюзовым выделен участок, показанный на графике условия ($R/3 \le x \le 2R/3$); кружок — точка $x = R/4$. Серый пунктир — потенциал заряда Q без диэлектрика.

Пункт 2. 4. Отношение потенциалов в двух точках. Подставим в формулу пункта 3 значения $x = R/3$ и $x = 2R/3$:

$$\varphi\Big(\frac{R}{3}\Big) = \frac{kQ}{\varepsilon R}\,(\varepsilon + 2), \qquad \varphi\Big(\frac{2R}{3}\Big) = \frac{kQ}{\varepsilon R}\Big(\varepsilon + \frac{1}{2}\Big).$$

Делим одно на другое: Q, R и неизвестный φ_0 сокращаются,

$$\frac{\varphi(R/3)}{\varphi(2R/3)} = \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon + \frac{1}{2}}.$$

5. Данные графика. В точке $x = R/3$ кривая проходит на уровне $\varphi/\varphi_0 = 4$, в точке $x = 2R/3$ — на уровне 3 (положения читаем по сетке: линии $x = R/3$ и $x = 2R/3$ — четвёртая и восьмая клетки, горизонтали

— целые значения). Значит, отношение равно $\frac{4}{3}$:

$$\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad 3\varepsilon+6=4\varepsilon+2\quad\Longrightarrow\quad \varepsilon=4.$$

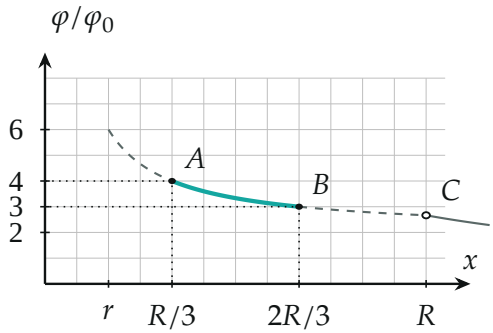
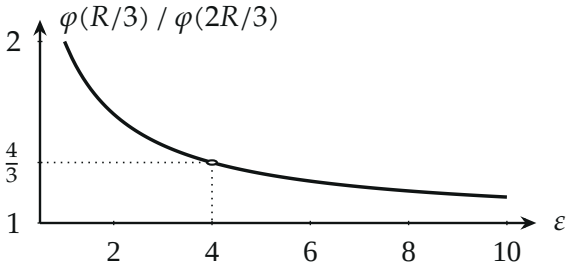


График условия (бирюзовый) и его продолжение при $\varepsilon=4$: влево до границы полости, вправо до $x=R$ и дальше — потенциал точечного заряда (серая линия). Точки: A $(R/3;\,4\varphi_0)$, B $(2R/3;\,3\varphi_0)$, C — граница шара, $\varphi(R)=\frac{8}{3}\varphi_0$.

Полученное $\varepsilon=4$ согласуется с условием: тогда $\varphi(R/3)=\frac{kQ}{4R}\cdot 6=\frac{3kQ}{2R}=4\varphi_0$, откуда $\varphi_0=\frac{3kQ}{8R}=\frac{kQ}{(8/3)R}$ — это потенциал точки вне шара на расстоянии $\frac{8}{3}R$ от центра; такая точка вне шара существует, как и сказано в условии.



Отношение $\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1/2}$ как функция ε: значение $\frac{4}{3}$ достигается один раз, при $\varepsilon=4$. Ось (уровень 1) — предел при $\varepsilon\to\infty$.

Проверка. Размерность: $\varphi(R/4) \sim kQ/R$ — потенциал; ε безразмерна. Предел для пункта 1: при $\varepsilon = 1$ (диэлектрика нет) формула даёт $\dfrac{kQ}{R}\cdot 4 = \dfrac{kQ}{x}$ при $x = R/4$ — потенциал точечного заряда. При $\varepsilon \to \infty$ поле в диэлектрике исчезает и потенциал в нём равен kQ/R во всех точках. Предел для пункта 2: при $\varepsilon = 1$ отношение равно $\frac{3}{3/2} = 2$ (обратная пропорциональность $\varphi \sim 1/x$), при $\varepsilon \to \infty$ — единице; значение $\frac{4}{3}$ лежит между ними, и ровно один ε его даёт. Второй способ для ε: по найденному φ_0 потенциал на середине, $\varphi(R/2) = \frac{kQ}{R}(1 + \frac{1}{4}) = \frac{10}{3}\varphi_0 \approx 3{,}3\,\varphi_0$, лежит между $4\varphi_0$ и $3\varphi_0$ и совпадает с видом кривой на графике. Смысл: диэлектрик уменьшает изменение потенциала внутри себя в ε раз, а по двум точкам графика эта величина измеряется.

Ответ. 1) $\varphi\left(\dfrac{R}{4}\right) = \dfrac{kQ}{\varepsilon R}\,(\varepsilon + 3)$; 2) $\varepsilon = 4$.