Две катушки во внешних полях

Задача 4. [Физтех 2023/24, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 4] Две катушки с индуктивностями $L_1 = L$ и $L_2 = 4L$ и числами витков $n_1 = n$ и $n_2 = 2n$ помещены во внешние однородные магнитные поля с постоянными во времени индукциями (см. рис.). Площадь витка каждой катушки S. Индукции внешних полей направлены перпендикулярно плоскостям витков катушек. Катушки находятся достаточно далеко друг от друга. Омическое сопротивление катушек и соединительных проводов пренебрежимо мало. Вначале тока в катушках нет.

1. С какой скоростью (по модулю) начнёт изменяться ток в катушках, если в катушке с индуктивностью L_1 индукция внешнего поля начнёт возрастать со скоростью $\Delta B/\Delta t = \alpha$ ($\alpha > 0$), а во второй катушке внешнее поле останется неизменным?
2. За некоторое время индукция внешнего поля в катушке с индуктивностью L_1 уменьшилась от B_0 до $B_0/2$, не изменив направления, а в катушке с индуктивностью L_2 индукция внешнего поля уменьшилась от $2B_0$ до $2B_0/3$, не изменив направления. Внешние поля в катушках изменялись неравномерно. Найдите ток (по модулю) в катушках к концу изменения внешних полей. Ответ дайте с числовым коэффициентом в виде обыкновенной дроби.

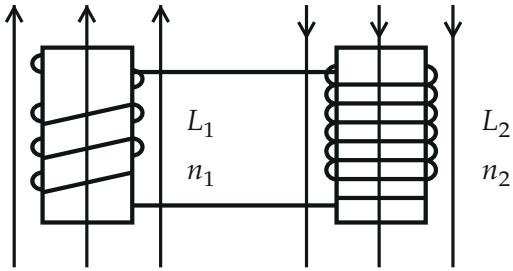


Рис. 1. Рисунок условия: слева поле направлено вверх, справа — вниз, катушки соединены двумя проводами в один контур.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача класса «индукция в контуре без сопротивления»: ЭДС → цепь (механики здесь нет). Катушки соединены в один контур с нулевым сопротивлением, а значит, сумма

всех ЭДС в нём в любой момент равна нулю: ЭДС индукции от внешних полей уравновешивается ЭДС самоиндукции катушек. Отсюда два следствия. Скорость изменения тока определяется скоростью изменения внешнего потока (пункт 1). А величина «внешний поток плюс собственный поток» не меняется вовсе (пункт 2), поэтому конечный ток зависит только от начальных и конечных значений полей, а не от того, как именно они менялись.

Обозначения. B_1 и B_2 — индукции внешних полей в катушках L_1 и L_2, I — ток в контуре. Положительное направление тока выберем так, чтобы собственное поле катушки L_1 при $I > 0$ было направлено вверх, как внешнее поле B_1. Катушки соединены последовательно, поэтому их ЭДС самоиндукции складываются всегда, как бы ни были намотаны витки: собственный поток каждой катушки при положительном токе положителен, и полная индуктивность контура $L_1 + L_2$. От намотки зависит другое — с каким знаком входит в контур *внешний* поток. По рисунку условия это видно только у L_1: передние витки идут наклонно вверх, и при обходе контура по часовой стрелке (по верхнему проводу от L_1 к L_2) ток в них создаёт поле вверх, вдоль B_1. Витки L_2 нарисованы горизонтально, и направление намотки по рисунку не определить. Принимаем договорённость организаторов (их ответ $13/30$ получается только при ней): при одном и том же токе собственные поля обеих катушек направлены одинаково, вверх. При обратной намотке L_2 внешние потоки вошли бы с одним знаком и получилось бы $19/30$. Тогда внешнее поле B_2 направлено против собственного поля катушки L_2, и поток внешнего поля через её витки входит со знаком «минус». Потоки через все витки: $\Phi_1 = n_1 B_1 S = nB_1 S$ и $\Phi_2 = -n_2 B_2 S = -2nB_2 S$.

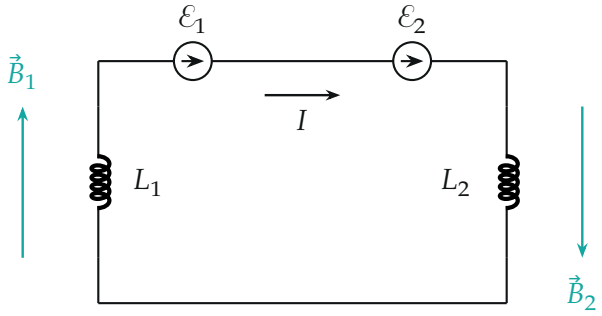


Рис. 2. Эквивалентная схема: катушки без сопротивления, ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ наводятся внешними полями (стрелка внутри — положительное направление), B_1 направлено вверх, B_2 — вниз.

Пункт 1.

1. Закон. Контур не имеет сопротивления, поэтому второй закон Кирхгофа гласит: сумма ЭДС в контуре равна нулю. ЭДС индукции в n_1 витках катушки L_1 по закону Фарадея $\mathcal{E}_1 = -n_1 S\,\Delta B_1/\Delta t = -n\alpha S$: поле растёт в положительном направлении, ЭДС стремится создать ток отрицательного направления (правило Ленца). В катушке L_2 внешнее поле постоянно, $\mathcal{E}_2 = 0$. ЭДС самоиндукции обеих катушек, включённых последовательно, равна $-(L_1 + L_2)\,\Delta I/\Delta t$.

2. Уравнение. Сумма ЭДС равна нулю:

$$-n\alpha S - (L_1 + L_2)\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{n\alpha S}{L_1 + L_2} = -\frac{n\alpha S}{5L}.$$

Знак «минус» означает, что ток течёт в отрицательном направлении: его собственное поле направлено против растущего внешнего поля (правило Ленца). Так как α постоянна, скорость изменения тока постоянна, и ток растёт по модулю линейно (рис. 3):

$$\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| = \frac{n\alpha S}{5L}.$$

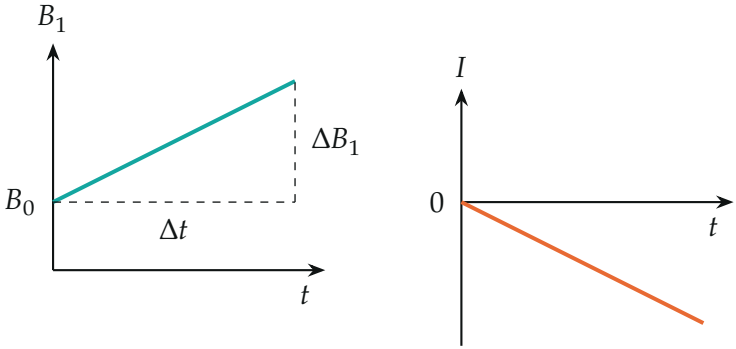


Рис. 3. Слева: внешнее поле в L_1 растёт с постоянной скоростью α. Справа: ток в контуре (в выбранном направлении) уменьшается с постоянной скоростью $n\alpha S/(5L)$ — собственное поле катушек противодействует росту внешнего.

3. Проверка размерности. $[\alpha S] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2/\text{с} = \text{В}$, $[\text{В}/\text{Гн}] = \text{А}/\text{с}$ — это скорость изменения тока.

Пункт 2.

4. Что сохраняется. Для любого малого промежутка Δt второй закон Кирхгофа даёт

$$-\frac{\Delta(\Phi_1+\Phi_2)}{\Delta t}-(L_1+L_2)\frac{\Delta I}{\Delta t}=0, \quad \text{то есть} \quad \Delta\left[\Phi_1+\Phi_2+(L_1+L_2)I\right]=0.$$

Складывая такие равенства по всем промежуткам от начала до конца процесса, получаем: величина

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + (L_1 + L_2)I = nB_1S - 2nB_2S + 5LI$$

одинакова в начале и в конце. То, как неравномерно менялись поля, не важно: суммируются малые приращения, и в итоге остаётся полное изменение. В начале тока нет.

5. Подстановка. В начале $B_1 = B_0$, $B_2 = 2B_0$, $I = 0$: $\Psi_{\text{нач}} = nB_0S - 2n \cdot 2B_0S = -3\,nB_0S$. В конце $B_1 = B_0/2$, $B_2 = 2B_0/3$:

$$\Psi_{\text{кон}} = \frac{nB_0S}{2} - 2n \cdot \frac{2B_0S}{3} + 5LI = -\frac{5}{6}\,nB_0S + 5LI.$$

Приравниваем: $5LI = -3\,nB_0S + \dfrac{5}{6}\,nB_0S = -\dfrac{13}{6}\,nB_0S$, откуда

$$I = -\frac{13}{30}\,\frac{B_0nS}{L}, \qquad |I| = \frac{13}{30}\,\frac{B_0nS}{L}.$$

Ток отрицательный: внешний поток в положительном направлении через контур вырос (с -3 до $-5/6$ в единицах nB_0S), и ток создаёт собственный поток противоположного знака, чтобы сумма не изменилась.

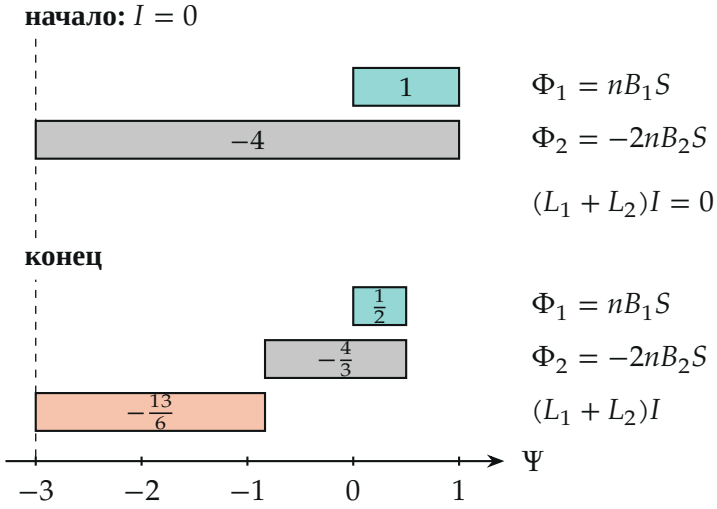


Рис. 4. Потокосцепление в единицах nB_0S складывается из трёх слагаемых. Первая полоса начинается от нуля, каждая следующая — там, где кончилась предыдущая (отрицательная идёт влево), и левый конец последней полосы в обоих случаях попадает на одну и ту же черту (пунктир): $\Psi = -3$ не меняется, меняется лишь разбиение на внешний и собственный потоки.

6. Второй способ — через приращение внешнего потока. Внешний поток через L_1 изменился на $\Delta\Phi_1 = nS(B_0/2 - B_0) = -\frac{1}{2}\,nB_0S$, через L_2 — на $\Delta\Phi_2 = -2nS(2B_0/3 - 2B_0) = +\frac{8}{3}\,nB_0S$. Полное изменение внешнего потока

$$\Delta\Phi_{\text{внеш}} = -\frac{1}{2}\,nB_0S + \frac{8}{3}\,nB_0S = \frac{13}{6}\,nB_0S,$$

а изменение собственного потока $5LI$ должно его компенсировать: $5LI = -\frac{13}{6}\,nB_0S$. Результат тот же.

7. Ток не помнит истории. Ток в любой момент выражается только через текущие значения полей: $I = -\Delta\Phi_{\text{внеш}}/(5L)$. На рис. 5 поля менялись по разным неравномерным законам ($B_1 = B_0(1-\tau^2/2)$, $B_2 = 2B_0 - \frac{4}{3}B_0\sqrt{\tau}$ при безразмерном времени τ от 0 до 1), а ток следует за ними так, чтобы Ψ оставалось постоянным, и в конце всё равно приходит к $-\frac{13}{30}\,B_0nS/L$.

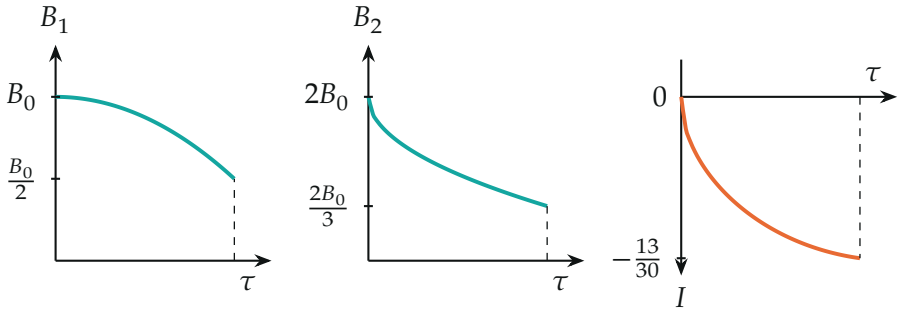


Рис. 5. Неравномерные изменения полей (два графика слева) и ток, который им отвечает (справа, в единицах nB_0S/L): ток зависит только от того, где поля оказались в конце.

Обратите внимание.

- Потоки через L_1 и L_2 входят в Ψ с *разными* знаками: внешние поля направлены противоположно (рисунок условия), а катушки намотаны одинаково (договорённость, см. «Обозначения»). Сложить их по модулю — главная ошибка.
- Время изменения полей и закон их изменения не нужны: при $R = 0$ сохраняется Ψ, и ток определяется только начальным и конечным состоянием полей.
- Катушки находятся далеко друг от друга, взаимной индукции нет: в Ψ входят только собственные индуктивности L_1 и L_2.

Проверка. Размерность: $[B][S]/[L] = \text{Тл}\cdot\text{м}^2/\text{Гн} = \text{Вб}/\text{Гн} = \text{А}$. Предел: если поля вернуть к начальным значениям, то $\Psi = -3\,nB_0S$ даст

$I = 0$, как и должно быть. Смысл: контур без сопротивления «запоминает» полный поток и подстраивает ток так, чтобы этот поток остался прежним; поэтому в ответе стоит именно разность потоков, делённая на суммарную индуктивность $5L$.

Ответ. 1) $\left|\dfrac{\Delta I}{\Delta t}\right| = \dfrac{n\alpha S}{5L}$; 2) $|I| = \dfrac{13}{30}\dfrac{B_0 nS}{L}$.