Лампочка, линза и зеркало

Задача 5. [Физтех 2023/24, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 5] В стене сделана небольшая выемка, внутри которой находится маленькая лампочка так, что прямой свет от лампочки на стену не попадает (см. рис.). Справа от лампочки на некотором расстоянии h расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = h/2$. Главная оптическая ось линзы горизонтальна и проходит через лампочку. Радиус линзы $r = 3$ см. Справа от линзы на расстоянии $l = 2h/3$ расположено параллельно стене плоское зеркало 3. Считать, что свет, идущий мимо линзы, проходит плоскость линзы беспрепятственно. Размеры стены и зеркала намного больше размеров линзы.

1. Найдите площадь неосвещённой части зеркала.
2. Найдите площадь неосвещённой части стены.

Ответы дайте в [см^2] в виде $\gamma\pi$, где γ — целое число или простая обыкновенная дробь.

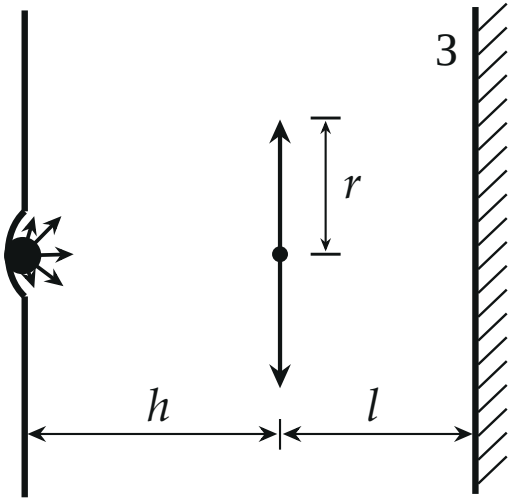


Рис. 1. Рисунок условия: лампочка в выемке стены (лучи уходят вправо), тонкая линза на расстоянии h от стены, зеркало 3 на расстоянии l от линзы.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача класса «ход лучей через линзу и зеркало». Свет лампочки делится на два пучка: часть лучей идёт мимо линзы и летит прямо, остальные проходят линзу и собираются ею. Оба пучка доходят до зеркала, отражаются и возвращаются к стене. Всё построение сводится к цепочке изображений: линза → зеркало → линза, а границы пучков находятся из подобия треугольников. Тёмное пятно ограничено двумя окружностями: границей «пучка через линзу» и границей «пучка мимо линзы». Законы: формула тонкой линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, закон отражения (изображение в плоском зеркале симметрично предмету), подобие треугольников.

Обозначения. S — лампочка (на стене, $x=0$), линза в плоскости $x=h$, зеркало в плоскости $x=h+l=\frac{5h}{3}$. S_1 — изображение S в линзе, S_2 — изображение S_1 в зеркале, S_3 — изображение S_2 в линзе. Расстояния от оси — ρ. Ось симметрии — главная оптическая ось, поэтому достаточно рассмотреть одно сечение, а границы пятен — окружности.

Пункт 1.

1. Первое изображение. Лампочка на расстоянии $d=h$ от линзы, $F=h/2$:

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{f}=\frac{2}{h} \quad\Rightarrow\quad f=h.$$

Изображение S_1 действительное и лежит на расстоянии h за линзой, то есть при $x=2h$. Зеркало стоит ближе ($x=5h/3<2h$), поэтому оно перехватывает пучок раньше, чем лучи успевают собраться в S_1 (рис. 2).

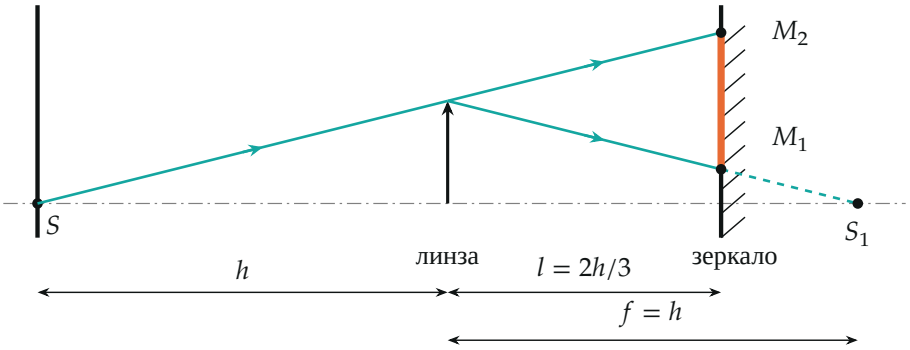


Рис. 2. Осевое сечение (показана верхняя половина). Бирюзовые лучи — свет лампочки: через край линзы он идёт на изображение S_1 и попадает на зеркало в точку M_1, мимо линзы — прямо в точку M_2. Между M_1 и M_2 (морковный отрезок) света нет.

2. Граница пучка, прошедшего через линзу. Крайний луч пучка идёт через край линзы ($\rho = r$ в плоскости $x = h$) в точку S_1 ($\rho = 0$ при $x = 2h$). В плоскости зеркала ($x = 5h/3$) он находится на расстоянии ρ_1 от оси. Подобные треугольники с общей вершиной в S_1 дают

$$\frac{\rho_1}{r} = \frac{2h - 5h/3}{2h - h} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{r}{3}.$$

Все лучи, прошедшие линзу, попадают на зеркало внутрь круга радиуса $r/3$ (их ближе к оси, чем край пучка).

3. Граница пучка, шедшего мимо линзы. Лучи, пролетевшие мимо линзы, не меняют направления; крайний — луч, идущий через край линзы без преломления. Он лежит на прямой $S \to$ (край линзы), на которой ρ растёт пропорционально x. В плоскости зеркала

$$\rho_2 = r \cdot \frac{5h/3}{h} = \frac{5r}{3}.$$

Остальные лучи этого пучка попадают дальше от оси.

4. Неосвещённая часть зеркала. Всякий луч лампочки либо проходит линзу (тогда он попадает на зеркало при $\rho \le r/3$), либо идёт мимо (тогда $\rho \ge 5r/3$). Между этими окружностями света нет — получаем кольцо (рис. 5, слева):

$$S_{\text{зерк}} = \pi\rho_2^2 - \pi\rho_1^2 = \pi r^2\Big(\frac{25}{9} - \frac{1}{9}\Big) = \frac{8}{3}\pi r^2 = \frac{8}{3}\pi \cdot 9\ \text{см}^2 = 24\pi\ \text{см}^2.$$

Пункт 2.

5. Изображения при обратном ходе. Пучок, прошедший линзу, после отражения от плоского зеркала идёт так, как если бы выходил из S_2 — точки, симметричной S_1 относительно зеркала: $x_{S_2} = 2\cdot\frac{5h}{3} - 2h = \frac{4h}{3}$. Это на расстоянии $h/3$ от линзы, со стороны зеркала: лучи, отражённые

зеркалом, сходятся в S_2 и затем расходятся к линзе, так что для линзы S_2 — действительный предмет (рис. 3). Формула линзы для $d = h/3$:

$$\frac{1}{h/3} + \frac{1}{f} = \frac{2}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = -\frac{1}{h}, \qquad f = -h.$$

Отрицательное f означает мнимое изображение на расстоянии h с той же стороны, что и предмет, то есть при $x = h + h = 2h$. Изображение S_3 совпало с S_1. Значит, после второго прохода линзы лучи расходятся так, как будто выходят из точки $x = 2h$ на оси.

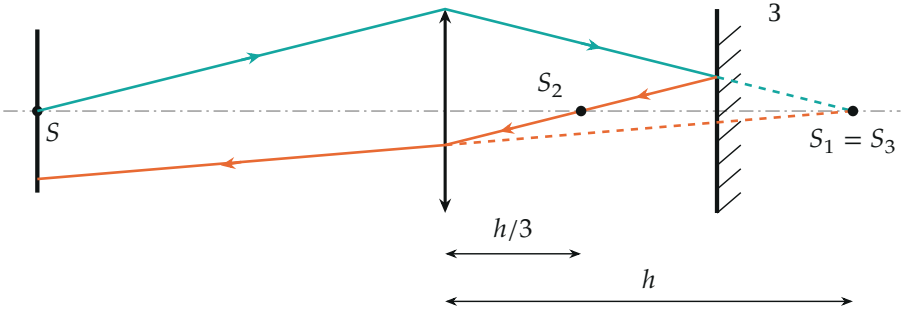


Рис. 3. Цепочка изображений: лампочка S даёт в линзе изображение S_1 (за зеркалом), зеркало даёт изображение S_1 в точке S_2, линза даёт изображение S_2 в точке S_3, которая совпала с S_1. Бирюзовый луч — путь к зеркалу, морковный — путь обратно; пунктир — продолжения лучей.

6. Граница пучка через линзу на стене. Лучи, отражённые в круге радиуса $r/3$, сходятся в S_2 и в плоскости линзы ($x = h$) оказываются на расстоянии $\dfrac{r}{3}$ от оси (подобие в S_2: расстояние от S_2 до зеркала $h/3$ и до линзы $h/3$ одинаковы), то есть внутри линзы, и поэтому преломляются. После линзы они идут как из S_3 ($x = 2h$). До стены ($x = 0$) краевой луч доходит на расстоянии

$$\rho_3 = \frac{r}{3} \cdot \frac{2h - 0}{2h - h} = \frac{2r}{3}$$

от оси. Этот пучок освещает на стене круг радиуса $2r/3$.

7. Граница пучка мимо линзы на стене. Лучи, пришедшие на зеркало мимо линзы, после отражения идут так, как будто выходят из S' — изображения лампочки в зеркале ($x_{S'} = \dfrac{10h}{3}$). Краевой луч ($\rho = \dfrac{5r}{3}$ на зеркале) в плоскости линзы лежит на расстоянии $\dfrac{5r}{3} \cdot \dfrac{10h/3 - h}{10h/3 - 5h/3} = \dfrac{7r}{3} > r$, то есть мимо линзы, и преломления не испытывает. На стене

$$\rho_4 = \frac{5r}{3} \cdot \frac{10h/3}{5h/3} = \frac{10r}{3}.$$

Весь этот пучок освещает стену в области $\rho \geq 10r/3$.

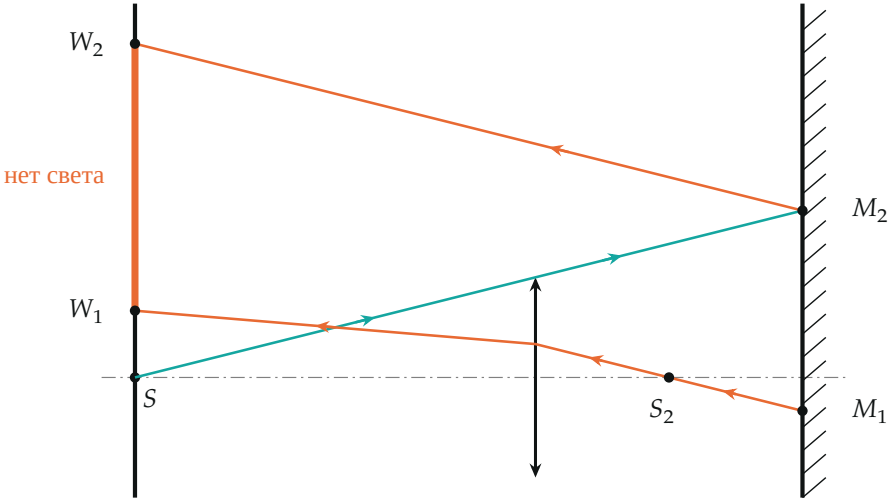


Рис. 4. Возвращение света к стене (верхняя половина, ось симметрии — пунктир). Луч, пришедший мимо линзы в M_2, после отражения идёт мимо линзы в точку W_2. Луч, отражённый в M_1 (на этом рисунке — в нижней половине, по симметрии), проходит S_2 и линзу и попадает в W_1. Между W_1 и W_2 (морковный отрезок) света нет.

8. Неосвещённая часть стены. На стену свет попадает только внутри круга $\rho \leq 2r/3$ и снаружи круга $\rho \geq 10r/3$; прямой свет лампочки на

стену не идёт. Между ними — кольцо (рис. 5, справа):

$$S_{\text{ст}} = \pi\rho_4^2 - \pi\rho_3^2 = \pi r^2\Big(\frac{100}{9} - \frac{4}{9}\Big) = \frac{32}{3}\,\pi r^2 = \frac{32}{3}\,\pi \cdot 9\ \text{см}^2 = 96\pi\ \text{см}^2.$$

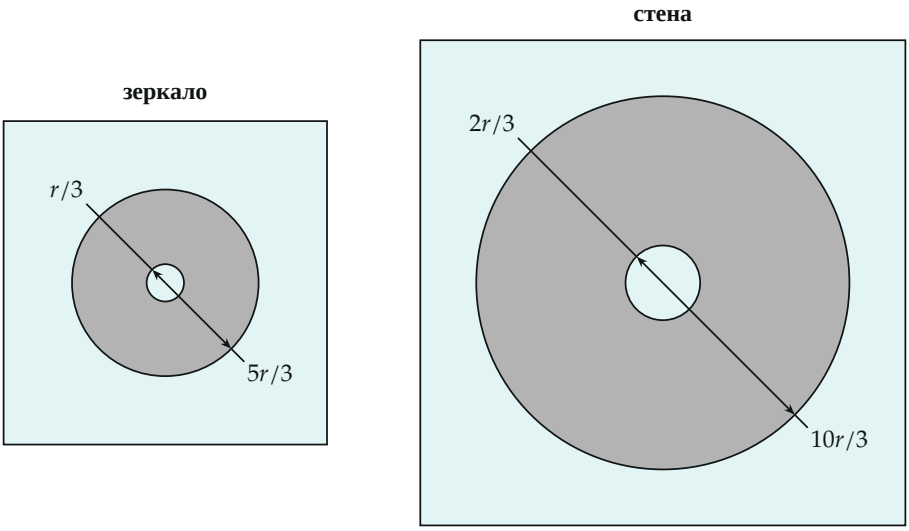


Рис. 5. Вид на зеркало и на стену со стороны линзы (масштаб один и тот же). Серое кольцо — область, куда свет не попадает; светлые — освещённые: центральный круг и внешняя часть.

Обратите внимание.

- Изображение S_1 лежит за зеркалом, поэтому зеркало работает со сходящимся пучком; его изображение S_2 получается симметрично относительно зеркала, а не «для предмета перед зеркалом». Именно из-за этого S_2 оказывается перед линзой, и во втором проходе линза даёт мнимое изображение.
- Пучок, пролетевший мимо линзы, и на обратном пути идёт мимо неё ($7r/3 > r$): линзе он не мешает.

Проверка. Размеры: ρ пропорциональны r, площади — r^2, ответ в см^2. Контроль численным расчётом хода лучей (python, тонкая линза, $h = 6$ см, $r = 3$ см, $2 \cdot 10^6$ лучей): на зеркале света нет только в кольце $1\ \text{см} < \rho < 5\ \text{см}$ (то есть $r/3 < \rho < 5r/3$), на стене — в кольце

2 см $< \rho <$ 10 см ($2r/3 < \rho < 10r/3$); значения не зависят от h. Смысл: размер тёмного кольца задан двумя пучками, и оба выражаются через r с помощью подобия.

Ответ. 1) $S_{\text{зерк}} = 24\pi$ см^2; 2) $S_{\text{ст}} = 96\pi$ см^2.