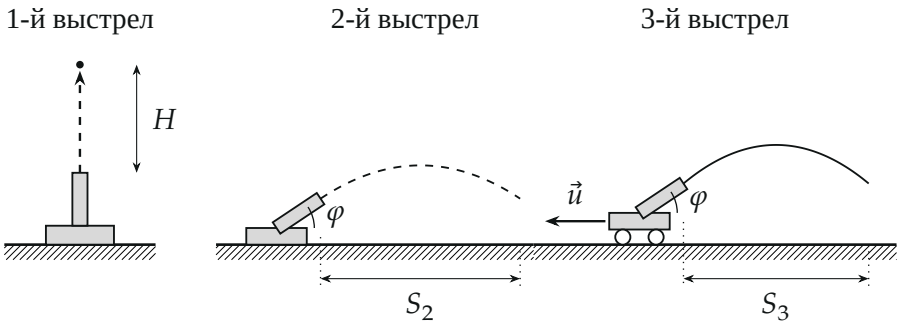
Игрушечная пушка: три выстрела

Задача 1. [Физтех 2023/24, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 1] Из игрушечной пушки стреляют три раза одним и тем же снарядом. Масса пушки без снаряда в 4 раза больше массы снаряда. Первый раз пушку закрепляют, а ствол направляют вертикально вверх. В результате выстрела снаряд поднялся на высоту $H = \dfrac{13}{3}$ м. Во второй раз пушку закрепляют на горизонтальном полу, ствол направляют под углом φ ($\tan\varphi = \dfrac{2}{3}$) к горизонту и стреляют. Третий раз пушка может скользить по горизонтальной поверхности пола без трения, поступательно, не отрываясь от пола. Ствол при третьем выстреле направлен под углом φ к горизонту.

1. Найдите дальность полёта S_2 снаряда при втором выстреле.
2. На каком расстоянии S_3 от места выстрела снаряд упадёт на пол при третьем выстреле?

Размеры пушки и сопротивление воздуха не учитывать. Снаряд вылетает под действием сжатой лёгкой пружины. Ответы дать в метрах в виде обыкновенной дроби или целого числа.



Поясняющий рисунок к условию (не организаторов): три выстрела. Траектории построены в масштабе, размеры пушки не учитываются; $\vec{u}$ — скорость отдачи пушки в третьем выстреле.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Во всех трёх выстрелах освобождается одна и та же энергия сжатой пружины E. Первый выстрел её измеряет: пушка закреплена, вся энергия достаётся снаряду, и он поднимается

на H, поэтому $E = mgH$. Во втором выстреле пушка тоже закреплена, поэтому снаряд получает ту же скорость V_0, но под углом φ, и дальность находится по формулам баллистики. В третьем выстреле пушка откатывается назад и уносит часть энергии, а горизонтальный импульс системы «пушка + снаряд» сохраняется. Скорость снаряда относительно пушки направлена вдоль ствола, то есть под углом φ к горизонту, а относительно пола угол получается другим. Класс задачи: выстрел из подвижной пушки — закон сохранения импульса в проекции + закон сохранения энергии + сложение скоростей.

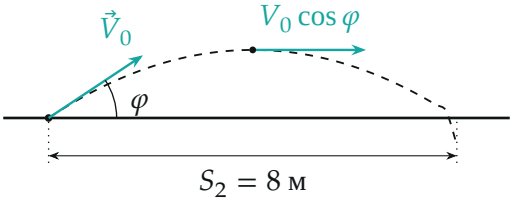
Обозначения. m — масса снаряда, $4m$ — масса пушки; $t = \tan\varphi = \frac{2}{3}$; ось x — по полу вправо, ось y — вверх. В третьем выстреле: u — скорость пушки сразу после выстрела (она катится влево), V_1 и V_2 — горизонтальная (вправо) и вертикальная (вверх) составляющие скорости снаряда относительно пола. Ускорение свободного падения g в ответ не войдёт.

Пункт 1. 1. Энергия пружины и скорость снаряда. Закон сохранения энергии для снаряда при первом выстреле: пружина лёгкая, пушка неподвижна, сопротивления нет, поэтому энергия пружины E целиком становится кинетической энергией снаряда, а затем — потенциальной в верхней точке:

$$E = \frac{mV_0^2}{2} = mgH, \qquad V_0^2 = 2gH.$$

Во втором выстреле пружина та же, пушка закреплена — скорость снаряда тоже V_0.

2. Дальность при втором выстреле. Вдоль x снаряд летит равномерно со скоростью $V_0\cos\varphi$, вдоль y — с ускорением $-g$ и начальной скоростью $V_0\sin\varphi$. Время подъёма равно времени спуска, полное время полёта $T_2 = \dfrac{2V_0\sin\varphi}{g}$:



Траектория второго выстрела в масштабе: в верхней точке остаётся только горизонтальная скорость $V_0 \cos\varphi$.

Дальность:

$$S_2 = V_0 \cos\varphi \cdot T_2 = \frac{2V_0^2 \sin\varphi\cos\varphi}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\varphi}{g} = 2H \sin 2\varphi.$$

Для $\tan\varphi = \frac{2}{3}$ получаем $\sin 2\varphi = \dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{4/3}{13/9} = \dfrac{12}{13}$, откуда

$$S_2 = 2 \cdot \frac{13}{3} \cdot \frac{12}{13} = 8 \text{ м}.$$

Пункт 2. 3. Что сохраняется при третьем выстреле. Берём систему «пушка + снаряд» на время выстрела. Горизонтальных внешних сил нет: пол гладкий, а сила тяжести и реакция пола вертикальны. Поэтому проекция импульса системы на ось x сохраняется:

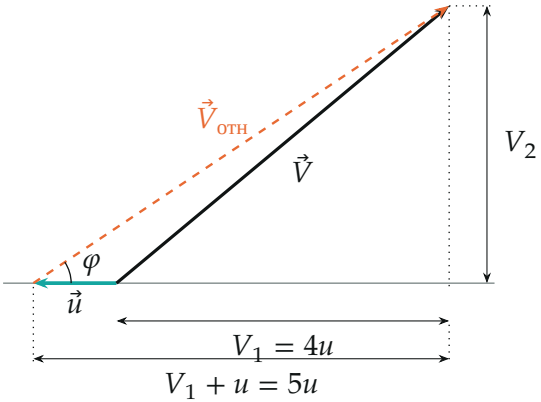
$$0 = mV_1 - 4mu \quad \Longrightarrow \quad V_1 = 4u.$$

Обратите внимание: вертикальный импульс системы не сохраняется — пол не даёт пушке уйти вниз и во время выстрела давит на неё с большой силой, поэтому записывать $mV_2 = 0$ нельзя.

4. Сложение скоростей. Снаряд скользит по стволу, поэтому его скорость *относительно пушки* направлена вдоль ствола, под углом φ. Пушка движется только по горизонтали (влево со скоростью u), поэтому относительная скорость имеет горизонтальную составляющую $V_1 - (-u) = V_1 + u$ и вертикальную V_2:

$$V_2 = (V_1 + u)\tan\varphi = 5ut.$$

Угол φ задан относительно пушки; относительно пола снаряд летит круче: $\tan\theta = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{5t}{4} = \dfrac{5}{6} > \dfrac{2}{3}$.



Скорости после выстрела: $\vec{u}$ — пушка, $\vec{V}$ — снаряд относительно пола, $\vec{V}_{отн} = \vec{V} - \vec{u}_{пушки}$ — снаряд относительно пушки (морковный пунктир, идёт под углом φ).

5. Энергия. Вся энергия пружины переходит в кинетическую энергию снаряда и пушки (пружина лёгкая, трения нет); потенциальная энергия на уровне пола не меняется:

$$\frac{m(V_1^2 + V_2^2)}{2} + \frac{4m\,u^2}{2} = mgH.$$

Подставляя $V_1 = 4u$ и $V_2 = 5ut$, получаем $mu^2\left(8 + \frac{25}{2}t^2 + 2\right) = mgH$:

$$u^2 = \frac{gH}{10 + 12{,}5\,t^2} = \frac{2gH}{5\,(4 + 5t^2)}.$$

6. Дальность при третьем выстреле. После вылета снаряд летит под действием одной тяжести с начальными скоростями V_1 и V_2; время по-

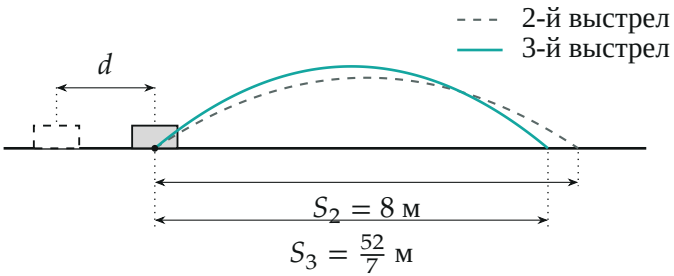
лёта $T_3 = \dfrac{2V_2}{g}$, горизонтальная скорость постоянна, поэтому

$$S_3 = V_1 T_3 = \frac{2V_1V_2}{g} = \frac{2\cdot 4u\cdot 5ut}{g} = \frac{40\,t\,u^2}{g} = \frac{16\,tH}{4+5t^2}.$$

Подставляем $t = \frac{2}{3}$:

$$S_3 = \frac{16\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{13}{3}}{4+\frac{20}{9}} = \frac{416/9}{56/9} = \frac{52}{7}\text{ м} \approx 7{,}43\text{ м}.$$

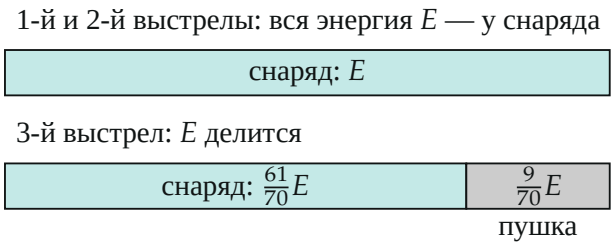
Расстояние отсчитывается от места выстрела, то есть от точки, где пушка стояла в момент выстрела; за время полёта пушка откатится влево ещё дальше, и это видно на рисунке.



Траектории в масштабе: серый пунктир — пушка закреплена, бирюзовая — пушка свободна; штриховой прямоугольник — пушка в момент падения снаряда, она откатилась на $d = \frac{13}{7}$ м.

Проверка. Размерность: $S_3 \sim H$, метры. Предел: для пушки массы M тот же вывод даёт $S_3 = \dfrac{4Ht}{1+(1+m/M)t^2}$; при $M \to \infty$ (пушка закреплена) это $\dfrac{4Ht}{1+t^2} = S_2$, а при $M = 4m$ — наш ответ. Второй способ для S_3: центр масс системы «пушка + снаряд» по горизонтали не смещается, значит за время полёта пушка откатилась на $d = \dfrac{S_3}{4} = \dfrac{13}{7}$ м; прямой счёт даёт $d = uT_3 = \dfrac{10\,t\,u^2}{g} = \dfrac{13}{7}$ м — то же. Смысл: дальность второго

выстрела 8 м, третьего $\approx 7{,}43$ м: энергия поделилась между снарядом (61/70 от E) и пушкой (9/70), и потому снаряд улетел чуть ближе.



Как делится энергия пружины (длина полосы — вся энергия $E = mgH$).

Ответ. 1) $S_2 = 8$ м; 2) $S_3 = \dfrac{52}{7}$ м $\approx 7{,}43$ м.