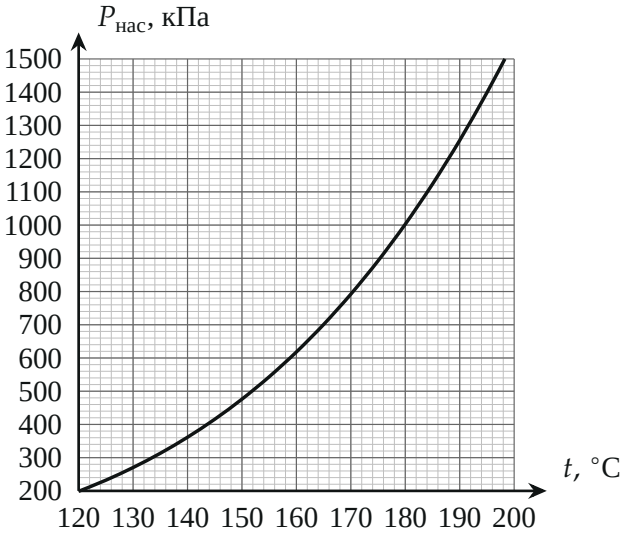
Влажный воздух под поршнем

Задача 2. [Физтех 2023/24, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 2] В цилиндрическом теплоизолированном сосуде с площадью основания $S = 10$ см^2 под лёгким, теплоизолированным, способным свободно перемещаться поршнем находится в равновесии влажный воздух с относительной влажностью $\varphi_1 = 100\%$ при температуре $t_1 = 100\,^\circ$C. Над поршнем вакуум. Поршень удерживается в равновесии силой $F = 150$ Н, направленной вдоль оси сосуда внутрь. В некоторый момент времени сила становится равной $1{,}5F$ и затем остаётся постоянной. Считайте, что нормальное атмосферное давление $P_0 \approx 100$ кПа. Воздух и водяной пар считать идеальными газами с молярными теплоёмкостями при постоянном объёме $C_{V1} = \dfrac{5R}{2}$ (сухой воздух), $C_{V2} = 3R$ (пар). На рисунке представлена зависимость давления насыщенного пара воды от температуры $P_{\text{нас}}(t)$.

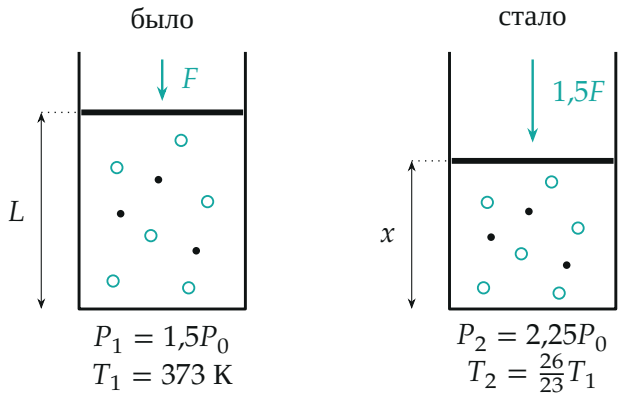


1. Найдите отношение начального равновесного давления P_1 к P_0.
2. Найдите в сосуде отношение числа молекул воды N_2 к числу молекул сухого воздуха N_1.

3. Найдите отношение температуры T_2 после установления термодинамического равновесия к начальной температуре T_1. Температуры T_2 и T_1 по шкале Кельвина. Ответ дать в виде обыкновенной дроби.
4. Найдите относительную влажность воздуха φ_2 в сосуде после установления термодинамического равновесия.

▲ **Решение. Что происходит.** Под поршнем смесь сухого воздуха и насыщенного водяного пара при 100 °C. Силу на поршень увеличили в 1,5 раза, он опустился и сжал смесь. Сосуд и поршень теплоизолированы, поэтому теплообмена нет, и вся работа внешней силы идёт на увеличение внутренней энергии газов: смесь нагревается. Класс задачи — насыщенный пар: сначала *предположение* (конденсации нет, число молекул пара не меняется), потом *проверка* по графику $P_{\text{нас}}(t)$ для найденной температуры.

Обозначения. Индекс 1 — до увеличения силы, индекс 2 — после установления равновесия; L и x — высота столба газа в сосуде, $S = 10^{-3}$ м^2; N_1, N_2 — числа молекул воздуха и воды, ν_1, ν_2 — их количества вещества; $\theta = T_2/T_1$. Поршень лёгкий, над ним вакуум, поэтому давление под поршнем в равновесии равно $P = F_{\text{внеш}}/S$.



Состояния до и после (вид сбоку). Бирюзовые кружки — молекулы воды (пар), чёрные точки — сухой воздух; над поршнем вакуум.

Пункт 1. 1. Равновесие поршня. Поршень лёгкий (его вес не учитываем), над ним вакуум, поэтому на поршень действуют только сила F сверху и сила давления газа P_1S снизу. Условие равновесия: $P_1S = F$,

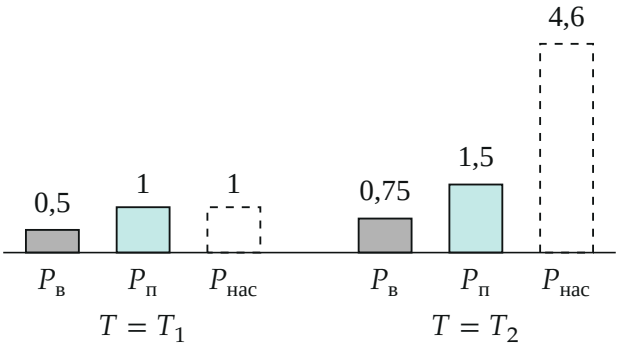
$$P_1 = \frac{F}{S} = \frac{150\ \text{Н}}{10^{-3}\ \text{м}^2} = 1{,}5 \cdot 10^5\ \text{Па} = 150\ \text{кПа}, \qquad \frac{P_1}{P_0} = 1{,}5.$$

Пункт 2. 2. Что в смеси. Относительная влажность 100% означает, что пар насыщенный. При $t_1 = 100\,^\circ\text{C}$ вода кипит под нормальным атмосферным давлением, поэтому $P_{\text{нас}}(100\,^\circ\text{C}) = P_0$ (на графике условия этой температуры нет — он начинается со $120\,^\circ\text{C}$). Закон Дальтона: давление смеси равно сумме парциальных давлений,

$$P_1 = P_\text{п} + P_\text{в}, \qquad P_\text{в} = 1{,}5P_0 - P_0 = 0{,}5P_0.$$

3. Отношение чисел молекул. Каждый газ занимает весь объём V_1 при температуре T_1 и по уравнению $P_iV_1 = N_ikT_1$ давление пропорционально числу молекул:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{P_\text{п}}{P_\text{в}} = \frac{P_0}{0{,}5P_0} = 2.$$



Парциальные давления воздуха $P_в$ и пара $P_п$ и давление насыщенного пара $P_{нас}(T)$ (штриховой контур) в единицах P_0. В начале пар насыщенный ($P_п = P_{нас}$), в конце — далёк от насыщения.

Пункт 3. 4. Предположение и давление в конце. Предположим, что конденсации нет, и проверим это в конце. Тогда числа молекул N_1 и N_2 те же. Сила стала $1{,}5F$, поршень лёгкий и в конце неподвижен, поэтому

$$P_2 = \frac{1{,}5F}{S} = 1{,}5P_1 = 2{,}25P_0.$$

Уравнение состояния смеси ($N_1 + N_2$ молекул) в начале и в конце: $P_1V_1 = (N_1 + N_2)kT_1$, $P_2V_2 = (N_1 + N_2)kT_2$. Деля одно на другое, получаем

$$V_2 = V_1 \frac{P_1}{P_2}\frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{3}\,\theta\, V_1.$$

5. Закон сохранения энергии. Тепло не поступает ($Q = 0$), поэтому изменение внутренней энергии газов равно работе внешней силы над ними: $A = \Delta U$. Работа постоянной силы $1{,}5F$ на пути $L - x$ равна $P_2S(L - x) = P_2(V_1 - V_2)$ — именно по внешней силе, потому что газ сжимается неравновесно и его давление в ходе движения поршня неизвестно; кинетической энергии у лёгкого остановившегося поршня нет. Подставляя V_2:

$$A = 2{,}25P_0V_1\Big(1 - \frac{2}{3}\,\theta\Big).$$

Внутренняя энергия смеси растёт на $\Delta U = (\nu_1C_{V1} + \nu_2C_{V2})(T_2 - T_1)$. Количества вещества выражаем из начального состояния: $\nu_1RT_1 = 0{,}5P_0V_1$ и $\nu_2RT_1 = P_0V_1$, поэтому

$$\nu_1C_{V1} + \nu_2C_{V2} = \frac{P_0V_1}{RT_1}\Big(0{,}5 \cdot \frac{5}{2}R + 1 \cdot 3R\Big) = 4{,}25\,\frac{P_0V_1}{T_1},$$

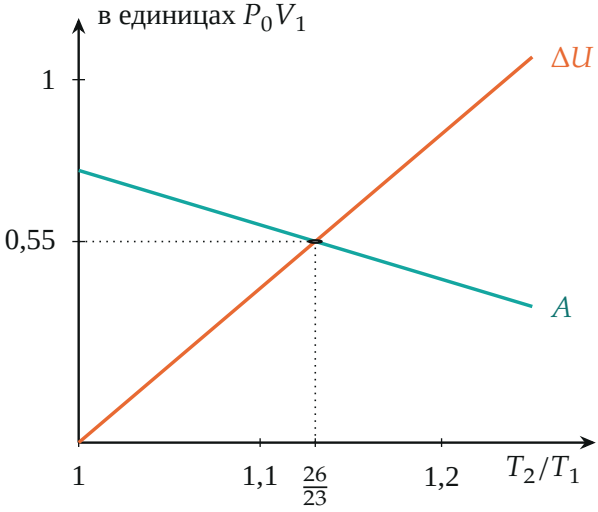
и

$$\Delta U = 4{,}25\,P_0V_1\,(\theta - 1).$$

6. Температура. Приравниваем $A = \Delta U$ и делим на P_0V_1:

$$2{,}25 - 1{,}5\,\theta = 4{,}25\,\theta - 4{,}25 \quad\Longrightarrow\quad \theta = \frac{6{,}5}{5{,}75} = \frac{26}{23}.$$

Чем сильнее газ нагрет, тем меньше он сжат и тем меньше работы совершено: левая часть убывает с θ, правая растёт, корень один — точка пересечения двух линий.



Работа внешней силы $A(\theta)$ (бирюзовая) убывает, изменение внутренней энергии $\Delta U(\theta)$ (морковная) растёт; пересечение — $\theta = \frac{26}{23}$. Обе величины — в единицах P_0V_1.

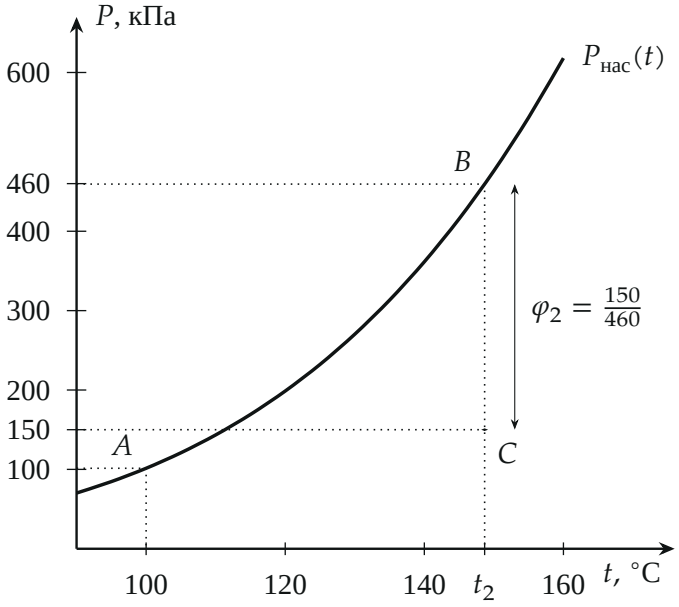
Температура в конце $T_2 = \frac{26}{23} \cdot 373\ \text{K} \approx 422\ \text{K}$, то есть $t_2 \approx 149\,^\circ\text{C}$: газ нагрелся примерно на 49 K.

Пункт 4. 7. Проверка предположения и влажность. Доля молекул воды в смеси $\frac{N_2}{N_1+N_2} = \frac{2}{3}$, поэтому в конце парциальное давление пара

$$P_{\text{п}2} = \frac{2}{3}P_2 = \frac{2}{3} \cdot 2{,}25P_0 = 1{,}5P_0 = 150\ \text{кПа}.$$

Читаем график при $t_2 \approx 149\,^\circ\text{C}$: $P_{\text{нас}} \approx 460$ кПа (при $150\,^\circ\text{C}$ кривая проходит чуть выше 470 кПа, при $140\,^\circ\text{C}$ — около 360 кПа). Так как $150 < 460$, пар ненасыщенный, конденсации нет, предположение из шага 4 верно. Относительная влажность

$$\varphi_2 = \frac{P_{\text{п}2}}{P_{\text{нас}}(t_2)} \approx \frac{150}{460} \approx 0{,}33.$$



Давление насыщенного пара воды. Точка A — начало (100 °C, P_0, пар насыщенный), C — конец (t_2, 150 кПа), точка B — насыщение при t_2. Влажность — отношение отрезков C и B по вертикали.

Обратите внимание: влажность — это отношение парциального давления *пара* к давлению насыщенного пара при *конечной* температуре, а не к общему давлению смеси и не к давлению насыщения при 100 °C.

Проверка. Размерность: все ответы — безразмерные отношения. Подстановка $\theta = \frac{26}{23}$ в уравнение энергии: левая часть $2{,}25(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{26}{23}) = 0{,}554$, правая $4{,}25 \cdot \frac{3}{23} = 0{,}554$. Второй способ для пункта 4: давление насыщенного пара равно 150 кПа примерно при 111 °C, а мы нагрелись до 149 °C, значит пар наверняка ненасыщенный, причём с большим запасом. Смысл: сжатие в 1,5 раза по давлению нагрело газ на 49 К, и насыщенное давление выросло в 4,6 раза, а давление пара — лишь в 1,5 раза, поэтому влажность упала с 100 % до трети.

Ответ. 1) $\frac{P_1}{P_0} = 1{,}5$; 2) $\frac{N_2}{N_1} = 2$; 3) $\frac{T_2}{T_1} = \frac{26}{23}$; 4) $\varphi_2 \approx 0{,}33$.