Конденсатор, диод и резистор

Задача 3. [Физтех 2023/24, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 3] В цепи (см. рис.) ЭДС идеального источника $E = 9$ В, $R = 100$ Ом, $C = 60$ мкФ, конденсатор заряжен до напряжения $U_1 = 3$ В. Вольт-амперная характеристика диода D приведена на рисунке. Ключ разомкнут, затем ключ замыкают.

1. Найдите ток I_1 в цепи сразу после замыкания ключа.
2. Найдите напряжение U_2 на конденсаторе в момент, когда ток в цепи станет $I_2 = 20$ мА.
3. Какое количество теплоты Q выделится на резисторе после замыкания ключа?

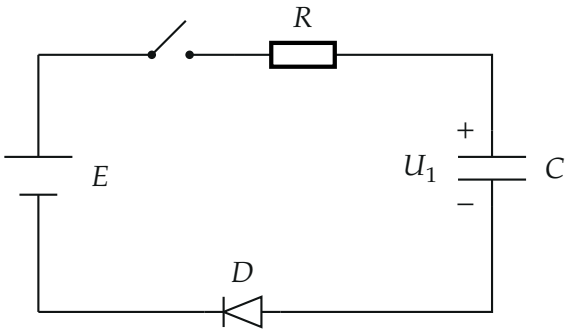


Рис. 1. Схема из условия: вверху ключ и резистор R, справа конденсатор C (верхняя пластина заряжена положительно), внизу диод D; длинная пластина источника — плюс.

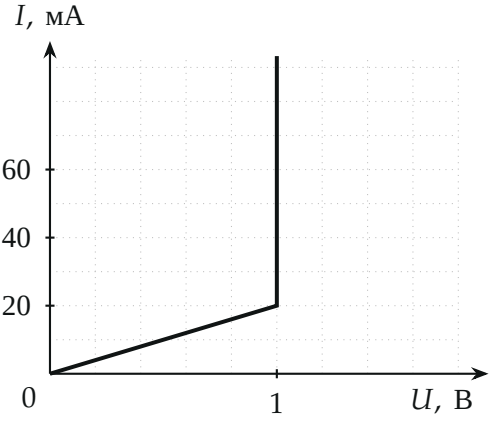


Рис. 2. Вольт-амперная характеристика диода из условия: от нуля до 1 В ток растёт прямо пропорционально напряжению до 20 мА, затем идёт вертикальный участок.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача класса «диод в цепи с конденсатором»: у диода две рабочие области, и на каждом этапе нужно понять, в какой он находится (перебор состояний). По вольт-амперной характеристике: пока ток меньше 20 мА, диод ведёт себя как обычный резистор, а при токе больше 20 мА напряжение на нём застывает на значении $U_0 = 1$ В (вертикальный участок). После замыкания ключа источник заряжает конденсатор: напряжение на нём растёт, ток падает. Сначала диод сидит на вертикальном участке, а когда ток упадёт до 20 мА, переходит на наклонный и дальше работает как резистор. Законы: второй закон Кирхгофа для контура в каждый момент и закон сохранения энергии для каждого этапа.

Обозначения. U_C — напряжение на конденсаторе в произвольный момент, U_D — на диоде, I — ток, $U_0 = 1$ В, R_D — сопротивление диода на наклонном участке. Ток идёт от плюса источника через резистор к верхней пластине конденсатора и дальше через диод в прямом направлении. Так как $E > U_1$, источник дозаряжает конденсатор.

Пункт 1.

1. Контур. Второй закон Кирхгофа для контура «источник — резистор — конденсатор — диод»: $E = U_C + IR + U_D$. Сразу после замыкания заряд конденсатора не успел измениться, поэтому $U_C = U_1 = 3$ В.

Остаётся выяснить, чему равно U_D, то есть на каком участке характеристики стоит диод.

2. Перебор состояний диода. Предположим, что диод на наклонном участке, где $U_D = R_D I$ и $R_D = \dfrac{1\text{ В}}{20\text{ мА}} = 50$ Ом. Тогда $I = \dfrac{E - U_1}{R + R_D} = 40$ мА. Это больше 20 мА, а наклонный участок кончается на 20 мА — противоречие. Предположим, что диод на вертикальном участке: $U_D = U_0 = 1$ В. Тогда

$$I_1 = \frac{E - U_1 - U_0}{R} = \frac{9 - 3 - 1}{100}\text{ А} = 0{,}05\text{ А} = 50\text{ мА} > 20\text{ мА},$$

и предположение согласуется: ток больше 20 мА, диод действительно на вертикальном участке. Геометрически это пересечение вольт-амперной характеристики диода с «прямой нагрузки» $I = (E - U_C - U_D)/R$, которая по второму закону Кирхгофа описывает всё остальное в цепи (рис. 3, верхняя прямая).

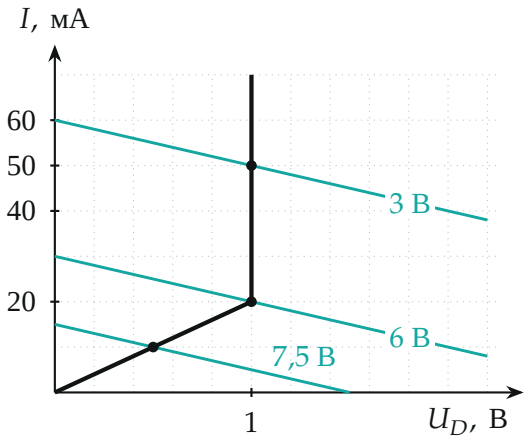


Рис. 3. Рабочая точка — пересечение характеристики диода с прямой нагрузки. По мере зарядки конденсатора прямая сдвигается вниз: точка идёт вниз по вертикальному участку до излома (20 мА), потом по наклонному участку к нулю. Числа у прямых — напряжение U_C на конденсаторе.

Пункт 2.

3. Момент, когда ток равен 20 **мА.** Это ток излома характеристики: напряжение на диоде здесь равно 1 В и по вертикальному участку, и по наклонному ($R_D I_2 = 50 \cdot 0{,}02 = 1$ В). Второй закон Кирхгофа даёт

$$U_2 = E - I_2 R - U_0 = 9 - 0{,}02 \cdot 100 - 1 = 6 \text{ В}.$$

Напряжение на конденсаторе выросло с 3 до 6 В, то есть конденсатор дозарядился, и прямая нагрузки для $U_C = 6$ В проходит ровно через излом (рис. 3, средняя прямая). Проверим, что до этого момента диод был на вертикальном участке: ток убывал от 50 до 20 мА и не опускался ниже 20 мА, значит, формула $U_D = U_0$ верна на всём этапе.

Пункт 3.

4. Картина процесса до счёта. Напряжение на конденсаторе растёт $\Rightarrow$ разность $E - U_C - U_D$ уменьшается $\Rightarrow$ ток падает. Пока $I > 20$ мА, диод «держит» на себе постоянное напряжение U_0 (этап 1); когда $I < 20$ мА, диод превращается в резистор $R_D = 50$ Ом (этап 2). На обоих этапах цепь — это конденсатор, заряжаемый через постоянное сопротивление, поэтому ток спадает по экспоненте, но с разными постоянными времени (рис. 4 и 5). Конденсатор в конце дозарядится до E: ток прекратится, когда напряжение на диоде станет равным нулю, а на резисторе тоже ноль, то есть при $U_C = E$.

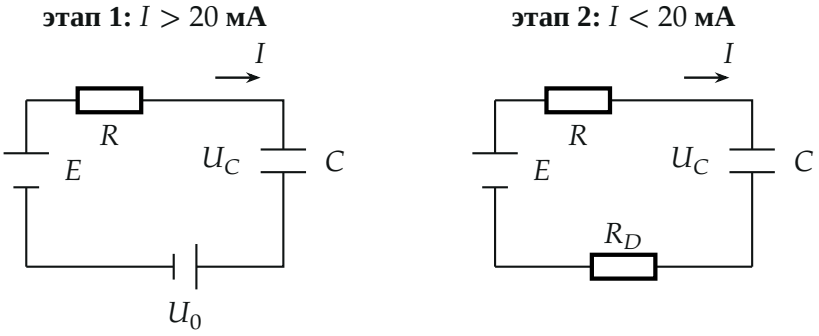


Рис. 4. Схемы замещения. Этап 1: диод заменён батареей $U_0 = 1$ В, включённой против тока (длинная пластина — плюс). Этап 2: диод заменён резистором $R_D = U_0/I_2 = 50$ Ом.

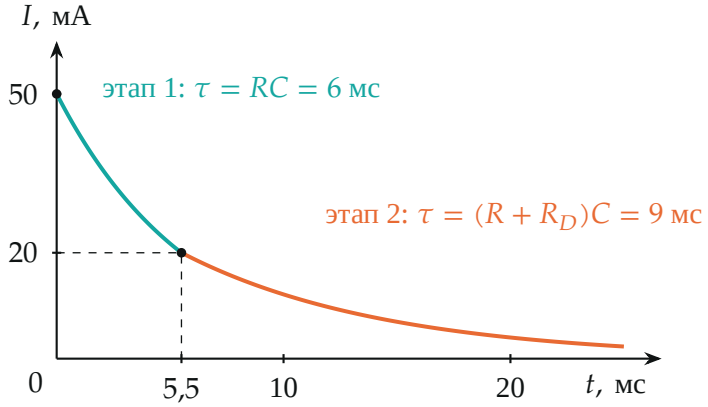


Рис. 5. Ток в цепи после замыкания ключа. На этапе 1 $I = I_1 e^{-t/RC}$ и ток падает с 50 до 20 мА за $t_1 = RC\ln(I_1/I_2) \approx 5{,}5$ мс; на этапе 2 $I = I_2 e^{-(t-t_1)/\tau_2}$ с $\tau_2 = (R + R_D)C = 9$ мс.

5. Теплота на резисторе на этапе 1 (ток от 50 до 20 мА). Возьмём малый промежуток dt. Через цепь проходит заряд $dq = I\,dt$, и ровно столько же получает конденсатор: $dq = C\,dU_C$. Теплота на резисторе

$$dQ = I^2R\,dt = (IR)\,dq = (E - U_0 - U_C)\,C\,dU_C,$$

где использовано $IR = E - U_0 - U_C$ (второй закон Кирхгофа на этапе 1). Суммируем от начала этапа ($U_C = U_1$) до его конца ($U_C = U_2$):

$$Q_1 = C\int_{U_1}^{U_2}(E - U_0 - U)\,dU = C(U_2 - U_1)\Big(E - U_0 - \frac{U_1 + U_2}{2}\Big) =$$
$$= 60 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 3{,}5\ \text{Дж} = 0{,}63\ \text{мДж}.$$

Подынтегральная функция — прямая, поэтому интеграл — площадь трапеции с основаниями $I_1R = 5$ В и $I_2R = 2$ В и высотой 3 В: $\frac{5+2}{2}\cdot 3 = 10{,}5$ В^2 (рис. 6), и $Q_1 = C \cdot 10{,}5$ В^2. *Второй способ* — закон сохранения энергии для этапа 1. Источник совершает работу $E\,\Delta q$, где $\Delta q = C(U_2 - U_1)$; она идёт на рост энергии конденсатора $\frac{C(U_2^2 - U_1^2)}{2}$, на

нагрев диода $U_0\Delta q$ (на диоде напряжение U_0, через него проходит тот же заряд) и на нагрев резистора Q_1:

$$E\,C(U_2-U_1)=\frac{C(U_2^2-U_1^2)}{2}+U_0C(U_2-U_1)+Q_1,$$

откуда получаем то же выражение для Q_1.

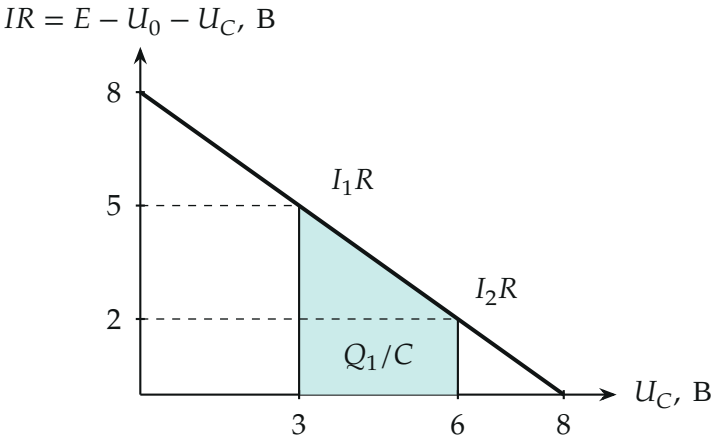


Рис. 6. Теплота Q_1 на резисторе в C раз больше площади бирюзовой трапеции под прямой $IR=E-U_0-U_C$ между $U_1=3$ В и $U_2=6$ В.

6. Теплота на резисторе на этапе 2 (ток от 20 мА до нуля). На наклонном участке диод — резистор $R_D=50$ Ом, и цепь превращается в конденсатор, заряжаемый через последовательные R и R_D (рис. 4, справа) от $U_2=6$ В до $E=9$ В. Энергетический баланс для этапа 2: работа источника $E\,C(E-U_2)$, рост энергии конденсатора $\dfrac{C(E^2-U_2^2)}{2}$, остальное — теплота W на R и R_D вместе:

$$W=C(E-U_2)\Big(E-\frac{E+U_2}{2}\Big)=\frac{C(E-U_2)^2}{2}=$$
$$=\frac{60\cdot10^{-6}\cdot9}{2}\text{ Дж}=0{,}27\text{ мДж}.$$

Резисторы соединены последовательно, ток у них один и тот же, поэтому мощности I^2R и I^2R_D делят теплоту пропорционально сопротивле-

ниям:

$$Q_2 = \frac{R}{R + R_D} W = \frac{100}{150} \cdot 0{,}27 \text{ мДж} = 0{,}18 \text{ мДж}.$$

Второй способ: ток на этапе 2 $I = I_2 e^{-t'/\tau_2}$ (t' — время от начала этапа), $\tau_2 = (R + R_D)C = 9$ мс, и

$$Q_2 = \int_0^\infty I^2 R \, dt' = \frac{R I_2^2 \tau_2}{2} = \frac{100 \cdot (0{,}02)^2 \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{2} \text{ Дж} = 0{,}18 \text{ мДж}.$$

7. Итог. Всего на резисторе выделится

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0{,}63 \text{ мДж} + 0{,}18 \text{ мДж} = 0{,}81 \text{ мДж}.$$

Обратите внимание.

- Заменять диод резистором $R_D = 50$ Ом можно только на наклонном участке (при токе меньше 20 мА). На вертикальном участке напряжение на диоде равно 1 В при любом токе, и R_D там «не работает» — именно поэтому на этапе 1 получается другой интеграл.
- На этапе 2 теплота $W = 0{,}27$ мДж выделяется и на резисторе, и на диоде; в Q входит только доля резистора, $2/3$ от W. Теплота на диоде (0,18 мДж на этапе 1 и 0,09 мДж на этапе 2) в ответ не входит.

Проверка. Размерность: $[C \cdot \text{В}^2] = \Phi \cdot \text{В}^2 = $ Дж. Полный баланс энергии: работа источника $E\,C(E - U_1) = 9 \cdot 60 \cdot 10^{-6} \cdot 6 = 3{,}24$ мДж равна приросту энергии конденсатора $\dfrac{C(E^2 - U_1^2)}{2} = 2{,}16$ мДж плюс теплота на диоде $0{,}18 + 0{,}09 = 0{,}27$ мДж плюс теплота на резисторе 0,81 мДж: $2{,}16 + 0{,}27 + 0{,}81 = 3{,}24$ мДж, всё сходится. Ток в начале (50 мА) больше тока на изломе (20 мА), а напряжение на конденсаторе растёт, как и должно быть при зарядке. Смысл: от источника отдано 3,24 мДж, две трети пошло в запас энергии конденсатора, а остальное превратилось в тепло, и резистору досталось 0,81 мДж.

Ответ. 1) $I_1 = 50$ мА; 2) $U_2 = 6$ В; 3) $Q = 0{,}81$ мДж.