Цепь с двумя катушками и ключом

Задача 4. [Физтех 2023/24, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 4] В цепи (см. рис.) ЭДС идеального источника E, $R_1 = R_2 = R$, $R_3 = 2R$, $r = R/5$, $L_1 = L$, $L_2 = 2L$. Ключ замкнут, режим в цепи установился.

1. Найдите ток I_0 через катушку L_1 при замкнутом ключе.
2. Найдите скорость изменения (по модулю) тока в катушке L_1 сразу после размыкания ключа.
3. Найдите заряд q_3, протекший через резистор R_3 после размыкания ключа.

Каждый ответ выразите через E, R, L с числовым коэффициентом в виде обыкновенной дроби.

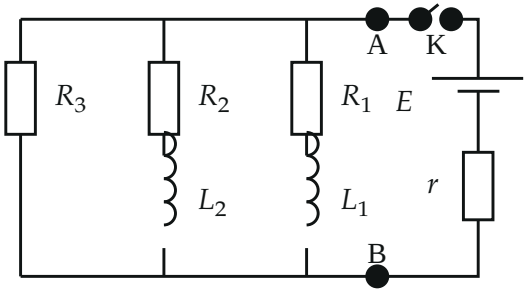


Рис. 1. Схема из условия: три параллельные ветви (R_3; R_2 с L_2; R_1 с L_1) и ветвь источника E с резистором r и ключом ; A и B — узлы.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача класса «цепь с катушками до и после размыкания ключа». Пока ключ замкнут и режим установился, токи постоянны, ЭДС самоиндукции нет, и катушки ведут себя как обычные провода. После размыкания источник отключён, но катушки не дают своим токам измениться скачком: в первый момент токи в них такие же, как были. Ток через R_3 в этот момент находим из того, что токи трёх ветвей замкнутого контура должны в сумме давать ноль. Законы: закон Ома для участка и для полной цепи, правила Кирхгофа, ЭДС самоиндукции $-L\,\Delta I/\Delta t$.

Обозначения. A — верхний узел (шина, к которой подходят все три ветви; на рисунке условия буква A стоит у ключа, но провод шины без

сопротивления, так что это один узел), B — нижний узел. I_1, I_2, I_3 — токи в ветвях R_1L_1, R_2L_2, R_3, положительные вниз (от A к B). $U = \varphi_A - \varphi_B$ — напряжение между узлами.

Пункт 1.

1. Эквивалентная схема. При замкнутом ключе токи постоянны, ЭДС самоиндукции $-L\,\Delta I/\Delta t = 0$, значит, напряжение на каждой катушке равно нулю: катушка — проводник (рис. 2). Остаются три параллельных резистора $R_3 = 2R$, $R_2 = R$, $R_1 = R$.

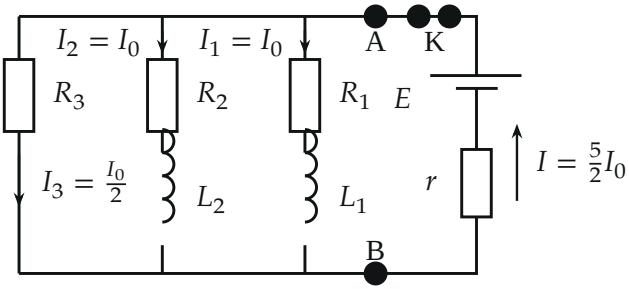


Рис. 2. Режим при замкнутом ключе: катушки заменены проводами, токи указаны стрелками. Через источник идёт ток I вверх (от минуса к плюсу внутри источника), в узле A он делится на три.

2. Сопротивление и ток источника. Для параллельного соединения

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{5}{2R} \quad \Rightarrow \quad R_{AB} = \frac{2R}{5}.$$

Закон Ома для полной цепи: $I = \dfrac{E}{r + R_{AB}} = \dfrac{E}{R/5 + 2R/5} = \dfrac{5E}{3R}$. Напряжение между узлами A и B

$$U_{AB} = IR_{AB} = \frac{5E}{3R} \cdot \frac{2R}{5} = \frac{2E}{3}.$$

(второй способ: $U_{AB} = E - Ir = E - \dfrac{5E}{3R} \cdot \dfrac{R}{5} = \dfrac{2E}{3}$.) К ветви R_1L_1

приложено напряжение U_{AB}, а на катушке напряжения нет, поэтому

$$I_0 = \frac{U_{AB}}{R_1} = \frac{2E}{3R}.$$

Токи остальных ветвей: $I_2 = \dfrac{U_{AB}}{R} = I_0$, $I_3 = \dfrac{U_{AB}}{2R} = \dfrac{E}{3R} = \dfrac{I_0}{2}$. Проверка по узлу: $I_0 + I_0 + \dfrac{I_0}{2} = \dfrac{5}{2}I_0 = \dfrac{5E}{3R} = I$.

Пункт 2.

3. Токи катушек в первый момент. Напряжение на катушке равно $L\,\Delta I/\Delta t$ и не может быть бесконечным, поэтому ток катушки за малое время не успевает измениться: сразу после размыкания $I_1 = I_0$ и $I_2 = I_0$ (оба вниз).

4. Ток через R_3. Ключ разомкнут, источник отключён, и других путей у тока нет. Первый закон Кирхгофа для узла A (все токи вниз по ветвям): $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, отсюда $I_3 = -2I_0$. Ток через R_3 изменил направление (теперь вверх) и по модулю равен $2I_0$ — в четыре раза больше, чем был (рис. 3).

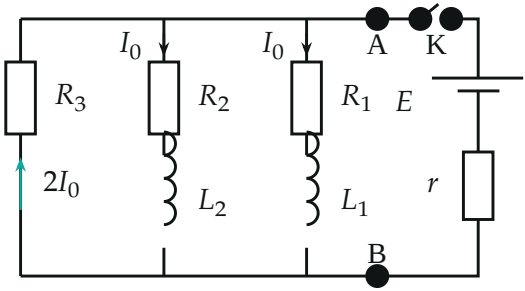


Рис. 3. Сразу после размыкания ключа: токи катушек прежние (I_0 вниз), ток через R_3 равен $2I_0$ и идёт вверх (источник отключён и показан серым).

5. Напряжение между узлами. Закон Ома для R_3: $U = \varphi_A - \varphi_B = I_3 \cdot 2R = -4I_0R$ (потенциал нижнего узла выше: ток идёт вверх).

6. Второй закон Кирхгофа для ветви R_1L_1. Напряжение между узлами складывается из падения на резисторе и на катушке: $U = I_1R + L\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t}$.

Подставляем:

$$-4I_0R = I_0R + L\frac{\Delta I_1}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad L\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -5I_0R.$$

Ток в L_1 убывает. Итак,

$$\left|\frac{\Delta I_1}{\Delta t}\right| = \frac{5I_0R}{L} = \frac{5R}{L}\cdot\frac{2E}{3R} = \frac{10E}{3L}.$$

Проверка через соседнюю ветвь: $U = I_2R + 2L\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t}$ даёт $2L\dfrac{\Delta I_2}{\Delta t} = -5I_0R$, то есть на обеих катушках сейчас одно и то же напряжение $5I_0R$, как и положено параллельным ветвям; у L_2 скорость вдвое меньше, потому что её индуктивность вдвое больше.

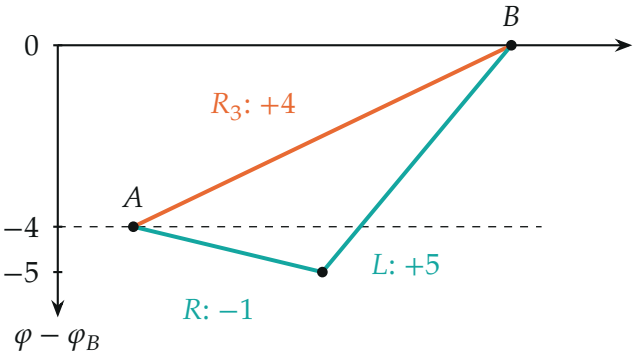


Рис. 4. Потенциал вдоль ветвей сразу после размыкания в единицах I_0R (от нижнего узла). Ветвь R_3 поднимает потенциал на 4; в ветвях с катушками резистор опускает его на 1, и катушка должна поднять на 5 — её ЭДС самоиндукции равна $5I_0R$.

Пункт 3.

7. Картина процесса до счёта. Энергия катушек $\dfrac{1}{2}LI_0^2 + \dfrac{1}{2}\cdot 2LI_0^2 = \dfrac{3}{2}LI_0^2$ после размыкания рассеивается на трёх резисторах, токи затухают. Ток I_3 в R_3 сначала равен $-2I_0$ и спадает к нулю, оставаясь одного знака, так что заряд через R_3 — просто интеграл от модуля тока. Ток I_1

в L_1 убывает быстрее, чем I_2 (в L_2 индуктивность больше), и в какой-то момент проходит через ноль (рис. 5), поэтому заряд через R_1 и R_2 нам не понадобится в чистом виде.

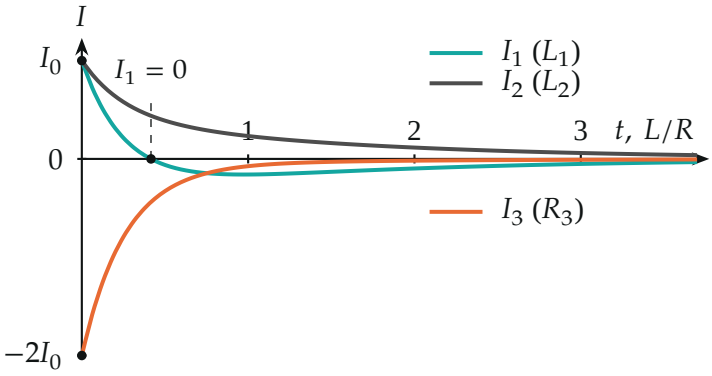


Рис. 5. Токи в ветвях после размыкания (численное решение уравнений контуров, I_0 и L/R — единицы): I_1 меняет знак при $t \approx 0{,}42\,L/R$, I_3 всё время направлен вверх и затухает.

8. Уравнения контуров. Для любого момента после размыкания (рис. 3, положительные направления — вниз):

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0, \qquad 2R\,I_3 = U,$$
$$R\,I_1 + L\frac{\Delta I_1}{\Delta t} = U, \qquad R\,I_2 + 2L\frac{\Delta I_2}{\Delta t} = U.$$

Умножим каждое уравнение на малое Δt и просуммируем по всем промежуткам от момента размыкания до полной остановки токов. Обозначим $Q_k = \int I_k\,dt$ — заряды, прошедшие по ветвям (со знаком, вниз), и учтём, что токи катушек изменились от I_0 до нуля: $\sum L\,\Delta I_1 = -LI_0$, $\sum 2L\,\Delta I_2 = -2LI_0$. Тогда

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0, \qquad 2R\,Q_3 = \int U\,dt,$$
$$RQ_1 - LI_0 = \int U\,dt, \qquad RQ_2 - 2LI_0 = \int U\,dt.$$

Исключаем $\int U\,dt$ и Q_1, Q_2:

$$Q_1 = 2Q_3 + \frac{LI_0}{R}, \qquad Q_2 = 2Q_3 + \frac{2LI_0}{R} \quad \Rightarrow \quad 5Q_3 + \frac{3LI_0}{R} = 0.$$

Отсюда $Q_3 = -\dfrac{3LI_0}{5R}$: знак «минус» означает, что заряд идёт вверх, как и ток I_3 (он не меняет знака). Искомый заряд

$$q_3 = |Q_3| = \frac{3LI_0}{5R} = \frac{3L}{5R}\cdot\frac{2E}{3R} = \frac{2}{5}\cdot\frac{LE}{R^2}.$$

Обратите внимание.

- После размыкания ток через R_3 не исчезает: контур «L_1, L_2, R_3» остаётся замкнутым, и R_3 получает ток $2I_0$ — вчетверо больше прежнего и в обратную сторону.
- Скорость $\Delta I_1/\Delta t$ определяется в первый момент напряжением $4I_0R$ на R_3 плюс падением на R_1: ответ $5I_0R/L$, а не $4I_0R/L$.
- Заряд q_3 — через R_3, а не через катушки: ток I_1 в процессе меняет знак, и заряд через L_1 был бы совсем другим ($-0{,}2\,LI_0/R$).

Проверка. Размерность: $[LE/R^2] = \text{Ом}\cdot\text{с}\cdot\text{В}/\text{Ом}^2 = \text{В}\cdot\text{с}/\text{Ом} = \text{А}\cdot\text{с} = \text{Кл}$; $[I_0R/L] = \text{В}/\text{Гн} = \text{А}/\text{с}$. Контроль численным решением уравнений (python): интегралы токов $Q_1 = -0{,}2$, $Q_2 = 0{,}8$, $Q_3 = -0{,}6$ (в единицах LI_0/R, сумма нулевая), а тепло на трёх резисторах $\int (I_1^2R + I_2^2R + I_3^2\cdot 2R)\,dt = 1{,}5\,LI_0^2$ равно начальной энергии катушек — закон сохранения энергии выполнен. Смысл: после размыкания энергия катушек уходит в резисторы, а заряд через R_3 определяется тем, как делится «потокосцепление» между ветвями.

Ответ. 1) $I_0 = \dfrac{2E}{3R}$; 2) $\left|\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t}\right| = \dfrac{10E}{3L}$; 3) $q_3 = \dfrac{2}{5}\,\dfrac{LE}{R^2}$.