Точечный источник, линза и датчик

Задача 5. [Физтех 2023/24, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 5] Точечный источник излучает свет одинаково по всем направлениям. На некотором расстоянии от него расположили датчик в форме диска, регистрирующий мощность P падающего света. Ось симметрии датчика проходит через источник. Между источником и датчиком на фиксированном расстоянии $a = 32$ см от источника расположили тонкую линзу радиусом $R = 2$ см так, что главная оптическая ось линзы совпала с осью симметрии датчика. На рисунке представлен график зависимости показаний датчика от расстояния x между линзой и датчиком.

1. Найдите радиус датчика r, считая его меньше радиуса линзы.
2. Найдите фокусное расстояние F линзы.
3. Найдите мощность источника P_0, считая $R \ll a$.

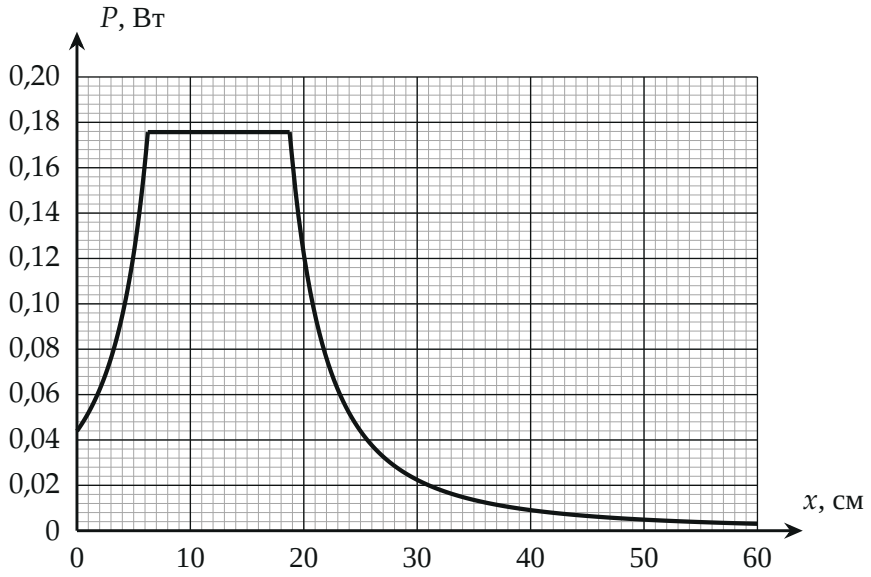


Рис. 1. График из условия: показание датчика P в зависимости от расстояния x от линзы до датчика.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача класса «обработка графика зависимости»: все числа находим из графика и из геометрии. Линза собирает свет источника в точку — изображение S^* на расстоянии f за линзой. Световой пучок за линзой сужается до точки в S^* и потом снова расширяется. Пока сечение пучка в плоскости датчика не больше самого датчика, датчик принимает всю прошедшую через линзу мощность, и график идёт горизонтально. Вне этого интервала часть пучка не попадает на датчик, показания падают. Границы плато задают сразу и f, и r. Законы: подобие треугольников для пучка, формула линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, равномерность излучения точечного источника по телесному углу.

Обозначения. S — источник, S^* — его изображение в линзе, f — расстояние от линзы до S^*, $\rho_b(x)$ — радиус светового пучка в плоскости датчика (на расстоянии x от линзы), P_m — показание на плато, $x_1 < x_2$ — границы плато. Расстояние $a = 32$ см заметно больше R, поэтому свет, дошедший до датчика, всё прошёл через линзу: луч от источника к датчику (радиус $r < R$, расстояние $a + x$) пересекает плоскость линзы на расстоянии $r\,a/(a + x) < R$ от оси.

Пункт 1.

1. Радиус пучка за линзой. Крайние лучи пучка идут из краёв линзы (радиус R) в точку S^*. Подобные треугольники:

$$\rho_b(x) = R\,\frac{|f - x|}{f}$$

(рис. 2 и рис. 3). Пучок целиком попадает на датчик, пока $\rho_b \le r$, то есть пока $f(1 - r/R) \le x \le f(1 + r/R)$. Значит, границы плато

$$x_1 = f\Big(1 - \frac{r}{R}\Big), \qquad x_2 = f\Big(1 + \frac{r}{R}\Big).$$

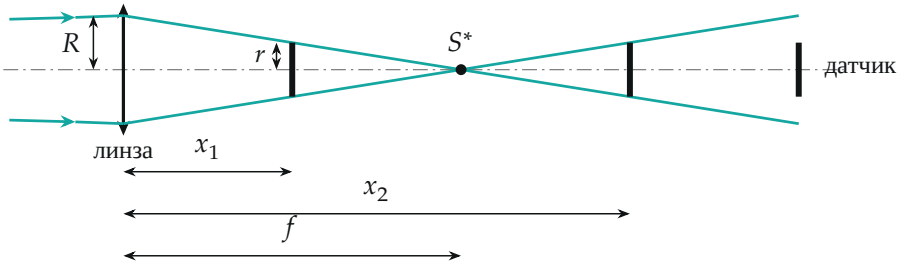


Рис. 2. Ход лучей за линзой и положения датчика: x_1 — пучок только что целиком вошёл в датчик, x_2 — пучок начинает выходить за край датчика, S^* — изображение источника. Масштаб по обеим осям одинаковый (0,45 см на сантиметр); вправо датчик показан на расстоянии 25 см.

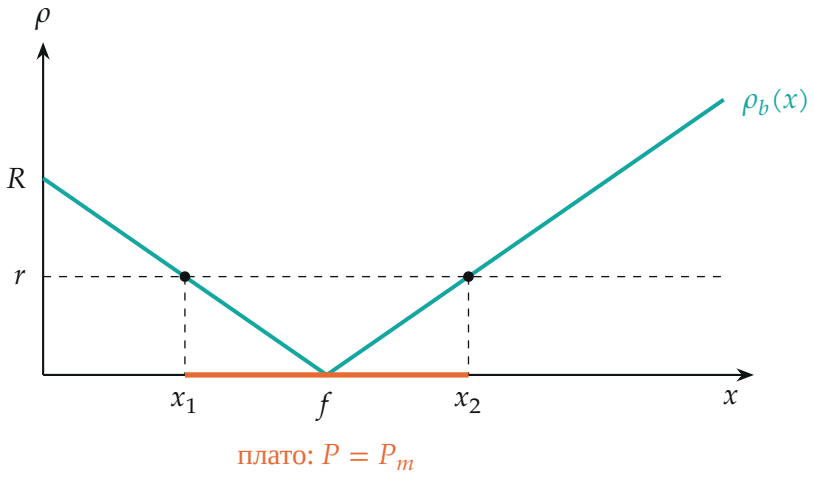


Рис. 3. Радиус светового пучка в плоскости датчика. Пока $\rho_b \le r$ (морковный участок оси, от x_1 до x_2), весь пучок попадает на датчик и показания постоянны; в точке $x = f$ пучок собран в точку.

2. Чтение графика. Плато начинается при $x_1 \approx 6{,}2$ см и кончается при $x_2 \approx 18{,}8$ см (точность отсчёта $\approx 0{,}2$ см), показание на плато $P_m \approx 0{,}176$ Вт. Складываем и вычитаем выражения для x_1 и x_2:

$$x_1 + x_2 = 2f, \qquad x_2 - x_1 = \frac{2fr}{R} \quad \Rightarrow$$

$$f = \frac{x_1 + x_2}{2} \approx 12{,}5 \text{ см}, \qquad \frac{r}{R} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} \approx 0{,}50.$$

Радиус датчика

$$r = R\,\frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = 2\text{ см}\cdot\frac{12{,}6}{25} \approx 1{,}0\text{ см}.$$

Второй способ — по показанию при $x = 0$. Датчик вплотную к линзе: пучок там радиуса $R > r$, датчик ловит долю r^2/R^2 его мощности (поток равномерен по сечению), $P(0) = P_m r^2/R^2$. По графику $P(0) \approx 0{,}045$ Вт:

$$r = R\sqrt{\frac{P(0)}{P_m}} = 2\text{ см}\cdot\sqrt{\frac{0{,}045}{0{,}176}} \approx 1{,}0\text{ см}.$$

Оба способа дают $r \approx 1$ см. (Если взять округлённые $x_1 = 6$ см и $x_2 = 19$ см, получится $r \approx 1{,}04$ см — в пределах точности отсчёта.)

Пункт 2.

3. Фокусное расстояние. Положение изображения найдено: $f \approx 12{,}5$ см, и оно действительное ($a = 32$ см больше F, источник дальше фокуса). Формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad F = \frac{af}{a+f} = \frac{32\cdot 12{,}5}{32 + 12{,}5}\text{ см} \approx 9{,}0\text{ см}.$$

Пункт 3.

4. Мощность источника. На плато датчик ловит всю мощность, прошедшую через линзу: P_m. Точечный источник излучает одинаково по всем направлениям, поэтому на линзу попадает доля, равная отношению площади круга линзы к площади сферы радиуса a вокруг источника (рис. 4; при $R \ll a$ вырезанный круг почти плоский, его площадь πR^2):

$$\frac{P_m}{P_0} = \frac{\pi R^2}{4\pi a^2} \quad\Rightarrow\quad P_0 = P_m\,\frac{4a^2}{R^2} = 0{,}176\text{ Вт}\cdot\frac{4\cdot 32^2}{2^2} \approx 180\text{ Вт}.$$

5. Погрешность. Показание на плато читается с точностью около 0,002 Вт, поэтому $P_0 = (180 \pm 2)$ Вт; для r и F погрешность определяется точностью отсчёта x_1 и x_2 ($\pm 0{,}2$ см): $r = (1{,}0 \pm 0{,}05)$ см, $F = (9{,}0 \pm 0{,}2)$ см.

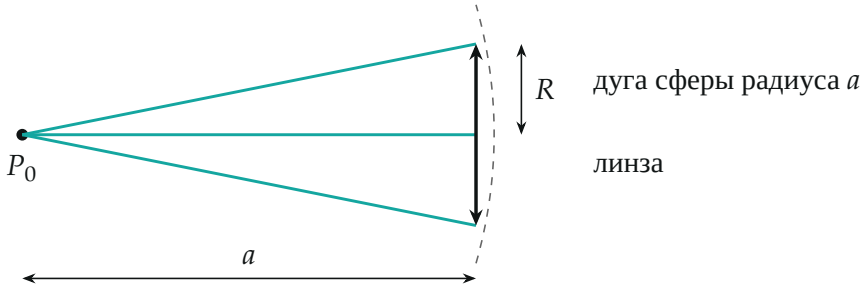


Рис. 4. Линза вырезает из сферы радиуса a с центром в источнике маленький круг площади πR^2 (рисунок не в масштабе: $R \ll a$).

6. Обработка данных на python. Проверим модель на всём графике. Если $x > x_2$, то $\rho_b = R(x-f)/f > r$, на датчик попадает доля r^2/ρ_b^2 пучка:

$$P = P_m\Big(\frac{rf}{R(x-f)}\Big)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad P\,(x-f)^2 = P_m\Big(\frac{rf}{R}\Big)^2 = \text{const}.$$

Ожидаемое значение константы $0{,}176 \cdot (1 \cdot 12{,}5/2)^2 \approx 6{,}9$ Вт·см^2. Отсчёты по графику (при $f = 12{,}5$ см):

x, см	22	25	30	40	50
P, Вт	0,076	0,0433	0,0222	0,0090	0,0048
$P(x-f)^2$, Вт · см^2	6,8	6,8	6,8	6,8	6,8

Произведение постоянно с точностью до отсчёта — модель верна. Независимая обработка методом наименьших квадратов: $P^{-1/2}$ линейно зависит от x (рис. 6); подгонка прямой по точкам правой ветви (21–59 см) даёт нуль при $x = 12{,}4$ см и $r = 1{,}02$ см, по точкам левой ветви (0,3–3 см) — нуль при 12,1 см и $r = 1{,}01$ см, что согласуется с $f \approx 12{,}5$ см и $r \approx 1{,}0$ см.

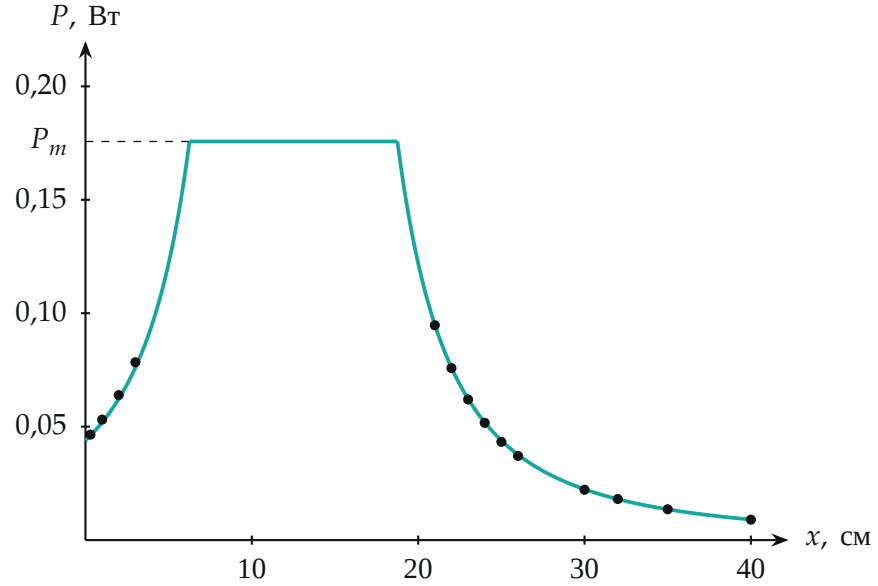


Рис. 5. Отсчёты по графику условия (точки) и расчётная кривая $P = P_m \min\{1, (rf/R(x-f))^2\}$ *при* $r = 1$ *см и* $f = 12{,}5$ *см (линия). Точки лежат на линии с точностью отсчёта.*

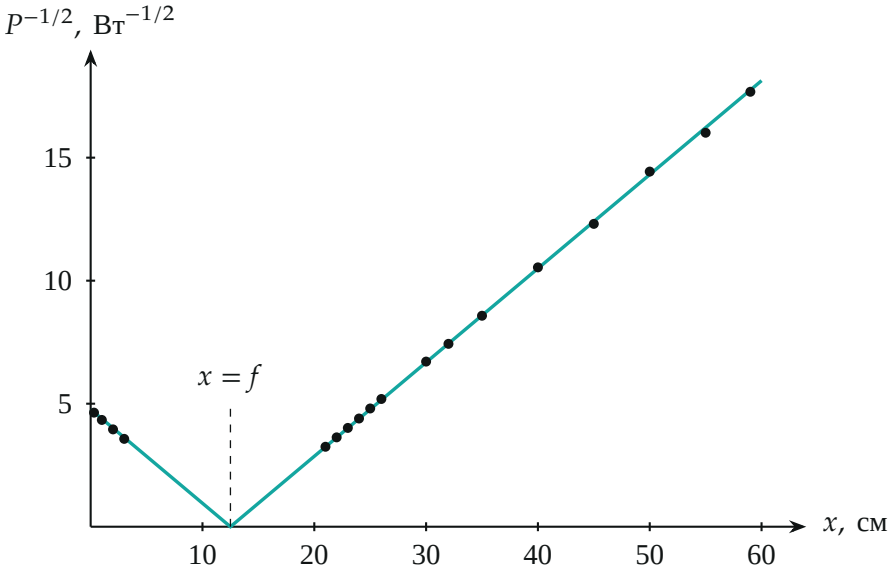


Рис. 6. Линеаризация: $P^{-1/2}$ линейно зависит от x по обе стороны от $x = f$ (в точке f пучок собран, и величина $P^{-1/2}$ минимальна). Точки — отсчёты по графику, прямые сходятся на оси x при $x \approx 12{,}5$ см.

Обратите внимание.

- Плато — это не «максимум света», а интервал, на котором пучок целиком умещается в датчик; его центр лежит ровно в S^*, поэтому $f = (x_1 + x_2)/2$, и для этого не нужны ни a, ни F.
- При $x < x_1$ (левая ветвь) и $x > x_2$ (правая ветвь) показания падают одинаково как $1/(x - f)^2$ — потому что мощность пучка P_m распределена по растущему кругу радиуса ρ_b.
- P_0 нужно считать по плато, а не по какому-то другому участку: только там датчик принимает всю мощность P_m, прошедшую линзу.

Проверка. Размерность: $[P_0] = [P_m]$ — ватты, отношения R^2/a^2 и r/R безразмерны, F и f — сантиметры. Предел: при $r \to R$ плато растягивается от $x_1 = 0$ до $x_2 = 2f$ ($x_2 - x_1 = 2fr/R \to 2f$): датчик размером с линзу ловит весь пучок, пока тот не шире линзы. При $r \to 0$ плато исчезает. Модель, построенная по найденным $f = 12{,}5$ см, $r = 1{,}0$ см и $P_m = 0{,}176$ Вт, ложится на все отсчёты по графику с отклонением в пределах 3% (рис. 5). Смысл: по графику «плато с краями» мы получили сразу положение изображения, размер датчика и, зная геометрию, мощность источника.

Ответ. 1) $r \approx 1$ см; 2) $F \approx 9$ см; 3) $P_0 \approx 180$ Вт.