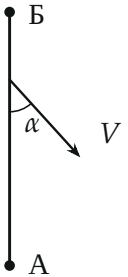
Дрон и ветер по маршруту А–Б–А

Задача 1. [Физтех 2023/24, 9 класс, варианты 09-01–09-02, задача 1] Беспилотные летательные аппараты применяют для доставки полезных грузов. Продолжительность полёта аппарата по маршруту А → Б в безветренную погоду составляет $T_0 = 400$ с. Расстояние АБ равно $S = 9{,}6$ км.

1. Найдите скорость U аппарата в спокойном воздухе.

Допустим, что в течение всего времени полёта ветер дует с постоянной скоростью $V = 16$ м/с под углом α к прямой АБ (см. рис.) таким, что $\sin\alpha = 0{,}6$.



2. Найдите продолжительность T_1 полёта по маршруту А → Б в этом случае. Скорость аппарата относительно воздуха постоянна и равна U.
3. При каком значении угла α продолжительность полёта по маршруту А → Б → А максимальная? Движение аппарата прямолинейное.
4. Найдите максимальную продолжительность T_{MAX} полёта по маршруту А → Б → А. Движение аппарата прямолинейное.

▲ **Решение. Что происходит.** Воздух движется относительно земли со скоростью $\vec{V}$, аппарат относительно воздуха — со скоростью $\vec{U}$, постоянной по модулю. Скорость относительно земли — их сумма (закон сложения скоростей): $\vec{v} = \vec{U} + \vec{V}$. Аппарат летит по прямой АБ, поэтому $\vec{v}$ лежит на АБ, а нос аппарат направляет чуть в сторону — так, чтобы погасить боковой снос. Часть скорости U уходит на борьбу с боковым ветром, и вдоль АБ он летит медленнее U.

Качественно: попутный ветер ускоряет, встречный замедляет, но на встречном участке аппарат проводит больше времени. Поэтому ветер маршрут «туда и обратно» только удлиняет.

Обозначения. Ось x — вдоль маршрута от А к Б, ось y — поперёк, налево. Зачем так: скорость относительно земли тогда лежит на оси x, её проекция на y равна нулю — это и есть «движение прямолинейное». Угол α отсчитан от направления на А (как на рисунке), поэтому у ветра есть составляющая вдоль $-x$ (к А) и составляющая вдоль $-y$ (вправо).

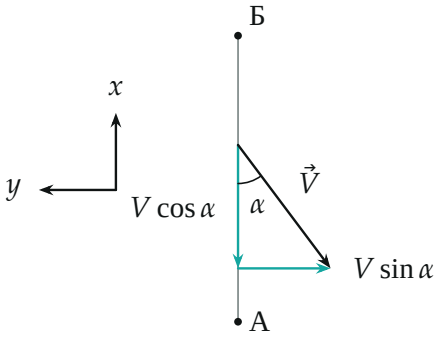
Пункт 1.

1. Скорость в спокойном воздухе. Ветра нет, аппарат летит равномерно:

$$U = \frac{S}{T_0} = \frac{9600\ \text{м}}{400\ \text{с}} = 24\ \text{м/с}.$$

Пункт 2.

2. Ветер в проекциях на оси. Вектор $\vec{V}$ раскладывается на составляющую вдоль маршрута и поперёк (рисунок): $V_x = -V\cos\alpha$, $V_y = -V\sin\alpha$ — обе против осей. Числа: $V\sin\alpha = 9{,}6$ м/с, $\cos\alpha = 0{,}8$ (угол острый, как на рисунке), $V\cos\alpha = 12{,}8$ м/с.



Ветер и его составляющие. Серая линия — маршрут АБ, бирюзовые стрелки — составляющие $\vec{V}$.

3. Закон сложения скоростей. Запишем его векторно и спроецируем на оси: аппарат летит по оси x, значит $v_y = 0$ и $v_x = v_1 > 0$ (скорость

относительно земли на пути А → Б).

$$\vec{v} = \vec{U} + \vec{V}: \qquad \begin{aligned} y:&\quad 0 = U_y - V\sin\alpha, \\ x:&\quad v_1 = U_x - V\cos\alpha. \end{aligned}$$

Из первого уравнения $U_y = V\sin\alpha = 9{,}6$ м/с — столько нужно подруливать против сноса. Модуль $\vec{U}$ постоянен: $U_x^2 + U_y^2 = U^2$, аппарат летит вперёд, поэтому

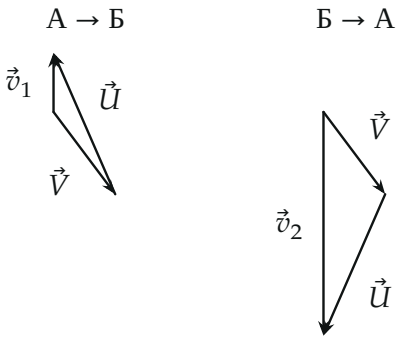
$$U_x = \sqrt{U^2 - V^2\sin^2\alpha} = \sqrt{576 - 92{,}16} \approx 22{,}0 \text{ м/с}.$$

Обозначим $w = \sqrt{U^2 - V^2\sin^2\alpha}$. Тогда $v_1 = w - V\cos\alpha \approx 22{,}0 - 12{,}8 = 9{,}2$ м/с.

Обратите внимание: $U_x \neq U$. Ответ «$S/(U - V\cos\alpha)$» неверен: он забывает, что часть скорости аппарата тратится на боковое подруливание.

4. Время. Движение вдоль АБ равномерное:

$$T_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{S}{w - V\cos\alpha} = \frac{9600}{9{,}196} \approx 1044 \text{ с}.$$



Треугольники скоростей «туда» и «обратно»: ветер один, $|\vec{U}| = 24$ м/с в обоих.

Второй способ — теорема косинусов для треугольника скоростей (рисунок выше): угол между $\vec{v}_1$ и $\vec{V}$ равен $180° - \alpha$, поэтому $U^2 = v_1^2 +$

$V^2 + 2v_1 V\cos\alpha$, и положительный корень этого уравнения — тот же $v_1 = w - V\cos\alpha$.

Пункт 3.

5. Обратный путь. Ветер тот же, аппарат летит против оси x. Проекция на y даёт прежнее $U_y = V\sin\alpha$, а $U_x = -w$:

$$v_x = U_x + V_x = -w - V\cos\alpha, \qquad |v_2| = w + V\cos\alpha \approx 34{,}8 \text{ м/с}.$$

Ветер, мешавший по пути к Б, помогает на пути к А: $T_2 = S/(w + V\cos\alpha) \approx 276$ с.

6. Полное время и его зависимость от угла. Сложим времена:

$$T_{\text{АБА}} = \frac{S}{w - V\cos\alpha} + \frac{S}{w + V\cos\alpha} = \frac{2Sw}{w^2 - V^2\cos^2\alpha}.$$

Знаменатель: $w^2 - V^2\cos^2\alpha = U^2 - V^2$, от угла не зависит (при $U > V$, иначе против ветра не долететь):

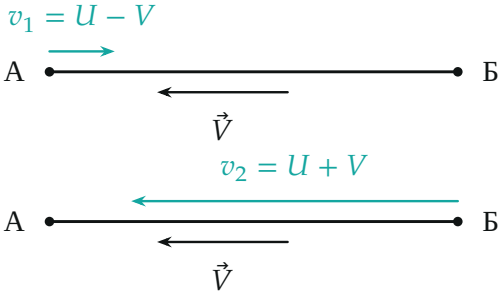
$$T_{\text{АБА}} = \frac{2S}{U^2 - V^2}\sqrt{U^2 - V^2\sin^2\alpha}.$$

Корень наибольший при $\sin\alpha = 0$, то есть $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$: ветер дует вдоль АБ. Углы $\pi < \alpha < 2\pi$ дают зеркальную картину.

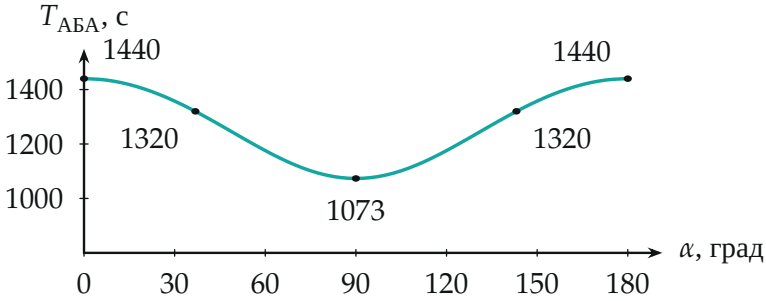
7. Проверка на крайних углах. При $\alpha = 0$ ветер дует вдоль АБ к А: на пути к Б он встречный, и скорость относительно земли $U - V = 8$ м/с, на обратном пути он попутный, и скорость $U + V = 40$ м/с (рисунок ниже). Время

$$\frac{S}{U - V} + \frac{S}{U + V} = 1200 \text{ с} + 240 \text{ с} = 1440 \text{ с},$$

как и даёт формула при $w = U$. При боковом ветре ($\alpha = 90°$) $w \approx 17{,}9$ м/с в обе стороны, $T_{\text{АБА}} = 2S/w \approx 1073$ с — заметно меньше.



Ветер вдоль АБ: сверху А → Б, снизу Б → А. Стрелки — в масштабе.



Время А → Б → А от угла ветра (отсчёт по вертикали от 800 с). Точки 1320 с — угол из условия, $\alpha \approx 37°$, и симметричный ему.

Пункт 4.

8. Наибольшее время. Подставим $\sin\alpha = 0$, то есть $w = U$:

$$T_{MAX} = \frac{2SU}{U^2 - V^2} = 2T_0\,\frac{U^2}{U^2 - V^2} = 2 \cdot 400 \cdot \frac{576}{320} = 1440 \text{ с}.$$

Проверка. Размерность: $S\,U/U^2$ — метры на м/с, то есть секунды. Предел $V \to 0$: $T_{MAX} \to 2S/U = 2T_0 = 800$ с, как в безветренную погоду; при $V = 16$ м/с $T_{MAX}/(2T_0) = 1{,}8 > 1$. Смысл: на попутном участке аппарат выигрывает меньше, чем проигрывает на встречном, ведь на встречном он проводит больше времени.

Ответ. 1) $U = 24$ м/с; 2) $T_1 = S/(w - V\cos\alpha) \approx 1044$ с, где $w = \sqrt{U^2 - V^2\sin^2\alpha}$; 3) $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$; 4) $T_{MAX} = 2SU/(U^2 - V^2) = 1440$ с.