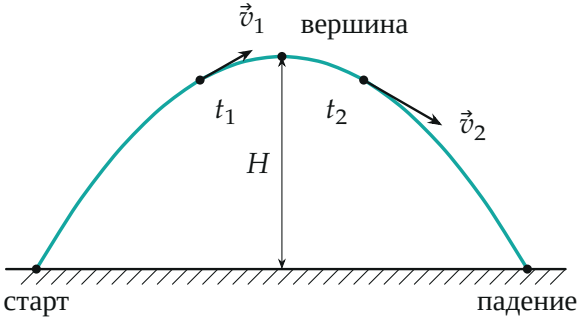
Удар по мячу с равным модулем скорости

Задача 2. [Физтех 2023/24, 9 класс, варианты 09-01–09-02, задача 2] Школьник наносит удар по мячу, лежащему на горизонтальной площадке. Модуль скорости мяча через $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с после старта одинаков. За этот промежуток времени вектор скорости повернулся на угол $2\beta = 60°$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Найдите продолжительность T полёта от старта до падения на площадку.
2. Найдите максимальную высоту H полёта.
3. Найдите радиус R кривизны траектории в момент времени $t_1 = 1$ с.



Поясняющий рисунок: траектория мяча и его скорость в моменты t_1 и t_2 — после и до вершины.

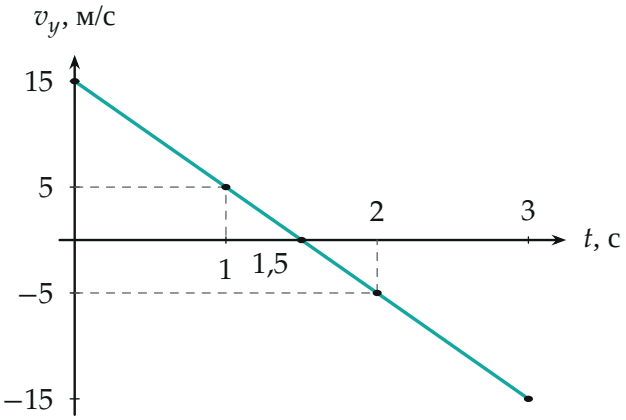
▲ **Решение. Что происходит.** Мяч, брошенный под углом к горизонту, движется с постоянным ускорением $\vec{g}$, направленным вниз. Поэтому горизонтальная составляющая скорости не меняется, а вертикальная меняется линейно. Модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ в моменты t_1 и t_2 одинаков, значит, одинаковы и $|v_y|$. Раз v_y всё время убывает, в два разных момента она может быть только противоположна по знаку, а вершина траектории ($v_y = 0$) лежит ровно посередине между ними. Эта симметрия — ключ ко всей задаче.

Обозначения. Ось x — горизонтально вдоль полёта, ось y — вертикально вверх, начало — точка старта на площадке. Зачем так: у ускорения тогда одна проекция, $a_y = -g$, а $a_x = 0$. v_x, v_y — проекции скорости; v_{y0} — начальная вертикальная скорость.

Пункт 1.

1. Вертикальная составляющая. Движение по y равноускоренное, $v_y(t) = v_{y0} - gt$. Модули скоростей равны, v_x одна и та же, поэтому $v_y(t_1)^2 = v_y(t_2)^2$. Равными сами $v_y(t_1)$ и $v_y(t_2)$ быть не могут: разность $v_y(t_1) - v_y(t_2) = g(t_2 - t_1)$ не равна нулю. Остаётся

$$v_y(t_1) = -v_y(t_2) \;\Rightarrow\; v_{y0} - gt_1 = -(v_{y0} - gt_2),$$
$$v_{y0} = g\,\frac{t_1 + t_2}{2} = 15 \text{ м/с}.$$



Вертикальная скорость. Значения при $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с противоположны (+5 и −5 м/с), ноль — посередине, при 1,5 с.

2. Время полёта. Из v_{y0} вершина достигается, когда $v_y = 0$: $t = v_{y0}/g = (t_1 + t_2)/2 = 1{,}5$ с. Вернуться на высоту старта — уравнение $v_{y0}t - gt^2/2 = 0$, корни $t = 0$ и $t = 2v_{y0}/g$. Поэтому

$$T = \frac{2v_{y0}}{g} = 2t = t_1 + t_2 = 3 \text{ с}.$$

Падение на ту же площадку, с которой начали, — поэтому подъём и спуск симметричны.

Пункт 2.

3. Наибольшая высота. Над вершиной мяч свободно падает вниз с нулевой вертикальной скоростью за $T/2 = 1{,}5$ с:

$$H = \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{10}{2}\cdot 2{,}25 = 11{,}25 \text{ м}.$$

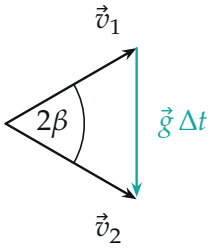
Второй способ: $H = v_{y0}^2/(2g) = 225/20 = 11{,}25$ м.

Пункт 3.

4. Треугольник скоростей. За время $\Delta t = t_2 - t_1 = 1$ с скорость меняется на $\vec{g}\,\Delta t$: вектор длиной 10 м/с, направленный вниз. Рисуем $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ из одной точки: $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{g}\,\Delta t$ — они образуют с $\vec{g}\,\Delta t$ треугольник. Он равнобедренный ($v_1 = v_2$) с углом $2\beta = 60^\circ$ при вершине, значит, углы при основании равны $(180^\circ - 60^\circ)/2 = 60^\circ$ — треугольник равносторонний, и

$$v_1 = v_2 = g\,\Delta t = 10 \text{ м/с}.$$

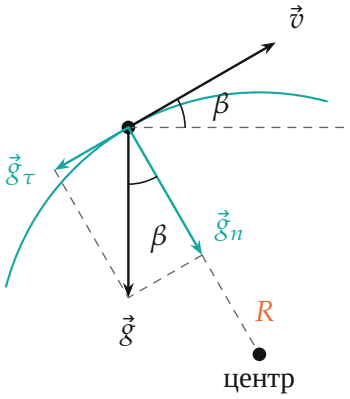
Вектор $\vec{g}\,\Delta t$ вертикален, а $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ имеют одну и ту же v_x, поэтому симметричны относительно горизонтали: каждый наклонён к ней на $\beta = 30^\circ$. Проверка: $v_x = v_1\cos\beta \approx 8{,}7$ м/с, $v_y(t_1) = v_1\sin\beta = 5$ м/с — как в $v_y = 15 - 10t$ при $t = 1$.



Треугольник скоростей: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и их разность — равносторонний.

5. Что нужно для радиуса кривизны. Малый участок траектории возле точки почти не отличим от дуги окружности; её радиус R и есть

радиус кривизны. Мяч едет по этой дуге, значит, составляющая ускорения, перпендикулярная скорости, — это центростремительное ускорение: $a_n = v^2/R$. Разложим $\vec{g}$ на составляющую вдоль скорости (она меняет модуль скорости) и перпендикулярную скорости, нормальную (она меняет направление):



Разложение $\vec{g}$ в точке траектории при t_1. Дуга — окружность кривизны, $\vec{g}_n$ направлена к её центру; β — и угол скорости с горизонтом, и угол между $\vec{g}$ и нормалью.

Угол между $\vec{g}$ (вертикаль) и нормалью (перпендикуляр к скорости) равен углу между скоростью и горизонталью, то есть β (стороны одного угла перпендикулярны сторонам другого). Из прямоугольного треугольника

$$a_n = g_n = g\cos\beta = g\,\frac{v_x}{v}, \qquad g_\tau = g\sin\beta.$$

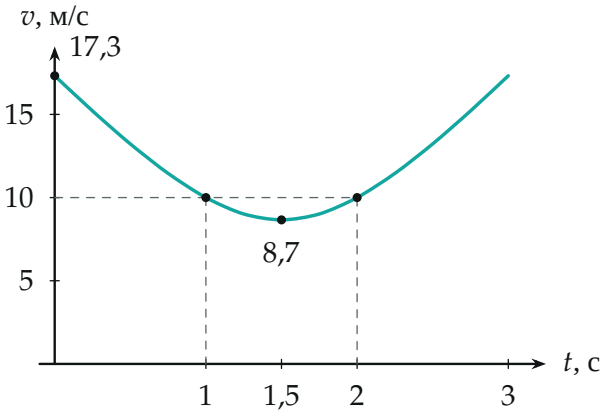
Знак: составляющая $\vec{g}_\tau$ направлена против скорости — мяч на подъёме тормозится; $\vec{g}_n$ направлена к центру кривизны, вниз и вперёд.

6. Радиус кривизны. Приравняем две записи нормального ускорения: $v^2/R = g\cos\beta$, откуда

$$R = \frac{v_1^2}{g\cos\beta} = \frac{100}{10\cdot 0{,}866} \approx 11{,}5 \text{ м}.$$

Обратите внимание: брать вместо a_n всё ускорение g нельзя — так вый-

дет $R = v^2/g = 10$ м, это верно только в вершине траектории, где скорость горизонтальна.



Модуль скорости $v(t) = \sqrt{v_x^2 + g^2(t-1{,}5)^2}$: кривая симметрична относительно вершины ($t = 1{,}5$ с), поэтому $v(1) = v(2) = 10$ м/с.

Проверка. Размерность: $v^2/(g\cos\beta)$ — $(\text{м/с})^2$ на м/с^2, то есть метры. Предел: в вершине траектории $\beta = 0$ и $R = v_x^2/g = 7{,}5$ м — наименьшее значение, дальше от вершины траектория выпрямляется ($R(t_1) \approx 11{,}5$ м больше). Второй способ для R: так как $\cos\beta = v_x/v$, получаем $R = v^3/(g\,v_x) = 1000/(10 \cdot 8{,}66) \approx 11{,}5$ м — тот же результат. Смысл: равенство модулей скорости в моменты 1 и 2 с делает траекторию симметричной, поэтому $T = t_1 + t_2$, а треугольник скоростей определяется одним углом.

Ответ. 1) $T = t_1 + t_2 = 3$ с; 2) $H = 11{,}25$ м; 3) $R = \dfrac{g(t_2 - t_1)^2}{\cos\beta} \approx 11{,}5$ м.