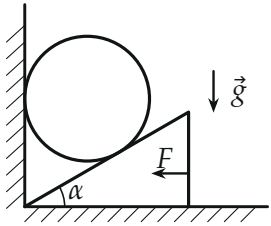
Шар и клин у стенки

Задача 3. [Физтех 2023/24, 9 класс, варианты 09-01–09-02, задача 3] Клин с углом при вершине $\alpha = 30°$ находится на горизонтальной поверхности. На наклонной плоскости клина покоится однородный шар (см. рис.), касающийся вертикальной стенки. Массы шара и клина одинаковы и равны $m = 1$ кг. Трения нет. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. Найдите горизонтальную силу F, которой систему удерживают в покое.

Силу F снимают, шар и клин приходят в поступательное прямолинейное движение с нулевой начальной скоростью. После перемещения по вертикали на $H = 0{,}8$ м шар абсолютно упруго сталкивается с горизонтальной поверхностью.

2. Найдите перемещение h шара после соударения до первой остановки.
3. Найдите ускорение a клина в процессе разгона.
4. При каком значении угла α ускорение клина максимальное?
5. Найдите максимальное ускорение a_{MAX} клина.

▲ **Решение. Что происходит.** Трения нет, поэтому между телами и опорами действуют только силы, перпендикулярные поверхностям. Шар прижат к стенке и может двигаться только вдоль неё, то есть вертикально; клин скользит по полу и может двигаться только горизонтально. Касание шара и клина связывает их движения: сколько клин уехал вправо, на столько-то шар опустился — это кинематическая связь. Поэтому после снятия F у системы одна «степень свободы», и для неё хватает либо

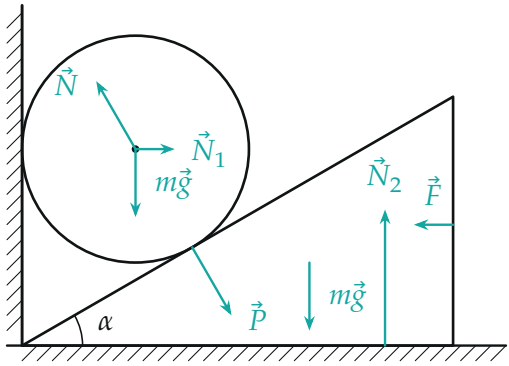
второго закона Ньютона для каждого тела вместе со связью, либо сохранения энергии. Класс задачи: тела со связями.

Обозначения. Ось x — вправо, ось y — вверх. Зачем: клин движется вдоль x, шар вдоль y, ускорения лежат на осях. N — сила, с которой клин действует на шар (перпендикулярна наклонной плоскости; по третьему закону Ньютона шар давит на клин силой $P = N$), N_1 — сила стенки на шар, N_2 — сила пола на клин.

Пункт 1.

1. Равновесие шара. Запишем второй закон Ньютона для шара в покое векторно, $\vec{N} + \vec{N}_1 + m\vec{g} = 0$, затем в проекциях (рисунок). Силы направим так: $\vec{N}$ перпендикулярна наклонной плоскости — вверх и влево, угол её с вертикалью равен α (стороны углов перпендикулярны), $\vec{N}_1$ — горизонтально вправо.

$$y: \quad N\cos\alpha - mg = 0 \;\Rightarrow\; N = \frac{mg}{\cos\alpha},$$
$$x: \quad N_1 - N\sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = mg\tan\alpha.$$



Силы в равновесии. Для шара все силы проходят через центр (шар гладкий, однородный). Для клина: $\vec{P} = -\vec{N}$ — давление шара, $\vec{N}_2$ — пол, $\vec{F}$ — удерживающая сила.

2. Система «шар + клин». Горизонтальные внешние силы на систему: N_1 (стенка, вправо) и F (влево). Покой, поэтому

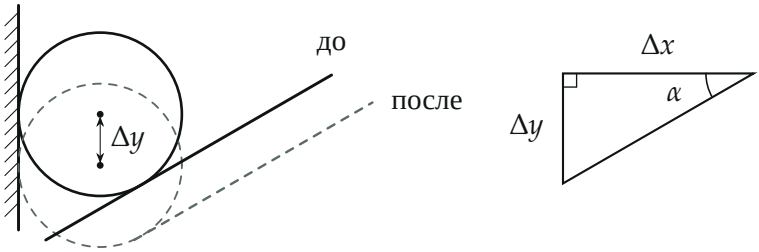
$$F = N_1 = mg\tan\alpha = 10 \cdot 0{,}577 \approx 5{,}8 \text{ Н}.$$

Второй способ — для клина по x: $P\sin\alpha = F$ с $P = N = mg/\cos\alpha$, то же самое. Система взята затем, что силы N и P — внутренние.

Пункт 2.

3. Кинематическая связь. Пусть клин сместился вправо на малое Δx. Шар касается и стенки, и наклонной плоскости, поэтому остаётся на том же расстоянии R от неё: если плоскость уехала на Δx, шар сместился вниз на Δy (рисунок: треугольник между двумя положениями поверхности, угол при его вершине равен α). Отсюда $\Delta y = \Delta x\tan\alpha$, и для скоростей

$$V_{\text{ш}} = V_{\text{кл}}\tan\alpha.$$



Положения шара и поверхности клина до смещения (сплошные) и после (пунктир). Справа — увеличенный треугольник между поверхностями: $\Delta y/\Delta x = \tan\alpha$.

4. Скорость шара перед ударом. Потери энергии нет. Работа внутренних сил N и P в сумме равна нулю (тела касаются, и вдоль нормали скорости у них одинаковы); силы стенки и пола перпендикулярны перемещениям шара и клина и работы не совершают. Поэтому убыль потенциальной энергии шара за H равна приращению кинетической энергии обоих тел:

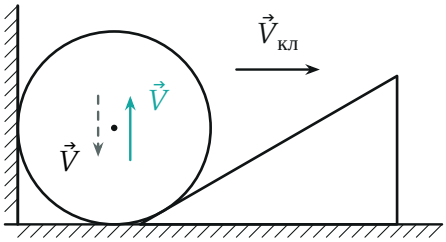
$$mgH = \frac{mV_{\text{ш}}^2}{2} + \frac{mV_{\text{кл}}^2}{2} = \frac{mV_{\text{ш}}^2}{2}\left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right) = \frac{mV_{\text{ш}}^2}{2\sin^2\alpha},$$

отсюда $V_{\text{ш}}^2 = 2gH\sin^2\alpha = 4$ м^2/с^2, $V_{\text{ш}} = 2$ м/с, а клин при этом едет $V_{\text{кл}} = V_{\text{ш}}/\tan\alpha \approx 3{,}5$ м/с.

5. Удар и подъём. Удар упругий: пол неподвижен, поэтому модуль скорости шара сохраняется, направление меняется на противоположное

— шар летит вверх с $V_ш = 2$ м/с. Горизонтальных ударных сил нет, клин продолжает ехать вправо с $V_{кл}$. Шар и клин теперь расходятся: шар идёт вверх, поверхность клина уходит вправо-вниз, контакт потерян, и на шар действует только сила тяжести (стенка шар не давит, горизонтального движения нет):

$$h = \frac{V_ш^2}{2g} = H\sin^2\alpha = 0{,}8 \cdot 0{,}25 = 0{,}2 \text{ м}.$$



Момент удара: шар касается пола и клина. После удара скорость шара направлена вверх (бирюзовая), клин продолжает ехать вправо — тела расходятся.

Пункт 3.

6. Силы при разгоне. Для клина по горизонтали действует только горизонтальная составляющая давления шара, $N\sin\alpha$; для шара по вертикали — тяжесть и вертикальная составляющая N (силы те же, что на первом рисунке решения, только без $\vec{F}$; в проекциях $N_1 = N\sin\alpha$, шар по горизонтали не движется). Второй закон Ньютона, ускорение клина a вправо, шара $a_ш$ вниз:

$$\text{клин, } x: \ ma = N\sin\alpha,$$
$$\text{шар, } y: \ ma_ш = mg - N\cos\alpha.$$

Связь $V_ш = V_{кл}\tan\alpha$ верна в каждый момент, поэтому $a_ш = a\tan\alpha$.

7. Ускорение клина. Выразим $N = ma/\sin\alpha$ и подставим в уравнение шара: $ma\tan\alpha = mg - ma\cos\alpha/\sin\alpha$, то есть $a(\tan\alpha + \cot\alpha) = g$.

Так как $\tan\alpha + \cot\alpha = 1/(\sin\alpha\cos\alpha)$,

$$a = g\sin\alpha\cos\alpha = 10\cdot 0{,}5\cdot 0{,}866 \approx 4{,}33 \text{ м/с}^2.$$

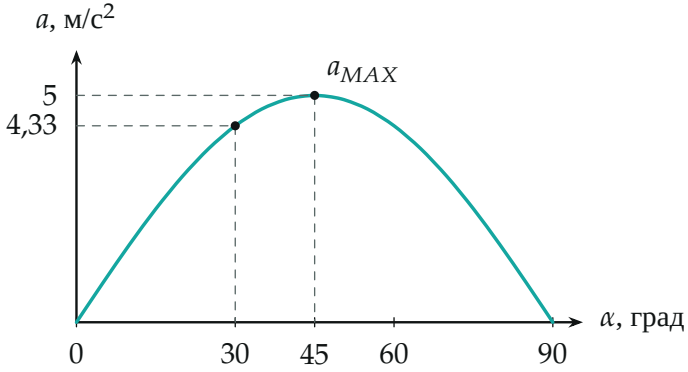
Второй способ (из энергии): ускорение постоянно, поэтому $V_{ш}^2 = 2a_{ш}H$, и из шага 4 $a_{ш} = g\sin^2\alpha = 2{,}5$ м/с^2, откуда $a = a_{ш}/\tan\alpha = g\sin\alpha\cos\alpha$ — то же.

Обратите внимание: $N = ma/\sin\alpha = mg\cos\alpha \approx 8{,}7$ Н меньше, чем в равновесии (11,5 Н), но положительна: контакт сохраняется весь разгон.

Пункты 4 и 5.

8. Максимум ускорения. Запишем $a = g\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{g}{2}\sin 2\alpha$. Синус наибольший (= 1), когда $2\alpha = 90°$:

$$\alpha = 45°, \qquad a_{MAX} = \frac{g}{2} = 5 \text{ м/с}^2.$$



Ускорение клина в зависимости от угла: максимум 5 м/с^2 при 45°; точка — $\alpha = 30°$, 4,33 м/с^2.

Проверка. Размерность: $g\sin\alpha\cos\alpha$ — м/с^2. Предельные углы: при $\alpha \to 0$ шар почти не опускается, $a \to 0$; при $\alpha \to 90°$ шар падает свободно ($a_{ш} = g\sin^2\alpha \to g$), а клин почти не сдвигается ($a = a_{ш}/\tan\alpha \to 0$); максимум — посередине, при 45°.

Ответ. 1) $F = mg\tan\alpha \approx 5{,}8$ Н; 2) $h = H\sin^2\alpha = 0{,}2$ м; 3) $a = g\sin\alpha\cos\alpha \approx 4{,}33$ м/с^2; 4) $\alpha = 45°$; 5) $a_{MAX} = g/2 = 5$ м/с^2.