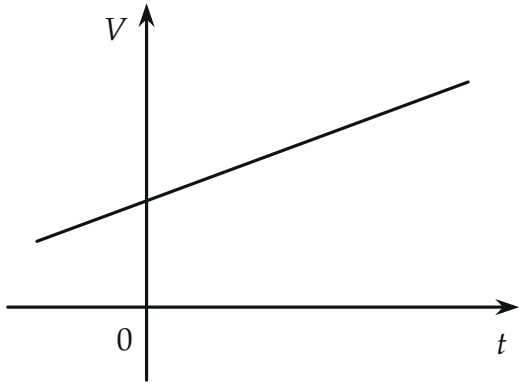
Ртутный термометр

Задача 4. [Физтех 2023/24, 9 класс, варианты 09-01–09-02, задача 4] На шкале ртутного термометра расстояние между отметками $t_1 = 35$ °C и $t_2 = 42$ °C равно $L = 5$ см. В термометре находится $m = 2$ г ртути.

Экспериментально установлено, что с ростом температуры объём ртути увеличивается по линейному закону. График зависимости объёма V ртути от температуры t, измеренной в градусах Цельсия, представлен на рисунке к задаче. При температуре $t_{100} = 100$ °C объём ртути в $\beta = 1{,}018$ раза больше объёма ртути при $t_0 = 0$ °C. Плотность ртути при температуре $t_0 = 0$ °C считайте равной $\rho = 13{,}6$ г/см^3. Тепловое расширение стекла пренебрежимо мало.



1. Следуя представленным опытным данным, запишите формулу зависимости объёма $V(t)$ ртути от температуры t, измеренной в градусах Цельсия. Формула должна содержать величины: m, ρ, β, t_0, t_{100}, t.
2. Найдите приращение ΔV объёма ртути при увеличении температуры от $t_1 = 35$ °C до $t_2 = 42$ °C. В ответе приведите формулу и число в мм^3.
3. Найдите площадь S поперечного сечения капилляра термометра. Ответ представьте в мм^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Ртуть в термометре при нагреве расширяется, а стекло почти нет. Весь «лишний» объём ртути вытесняется в

тонкий капилляр, и столбик ртути удлиняется, так что длина столбика показывает температуру. Зависимость объёма от температуры линейна, а прямая на графике определяется двумя точками: $(t_0;\ V_0)$ и $(t_{100};\ \beta V_0)$. Поэтому план такой: найти V_0 из массы и плотности, записать уравнение прямой, найти приращение объёма между отметками и затем сечение капилляра из того, что приращение объёма — это цилиндр длиной L.

Обозначения. V_0 — объём ртути при $t_0 = 0$ °C, $V_{100} = \beta V_0$ — при t_{100}, k — наклон прямой (на сколько растёт объём при нагреве на 1 °C), V_1 и V_2 — объёмы при t_1 и t_2.

Пункт 1.

1. Объём при t_0. Масса ртути при нагреве не меняется, а плотность ρ дана при t_0, поэтому по определению плотности

$$V_0 = \frac{m}{\rho}.$$

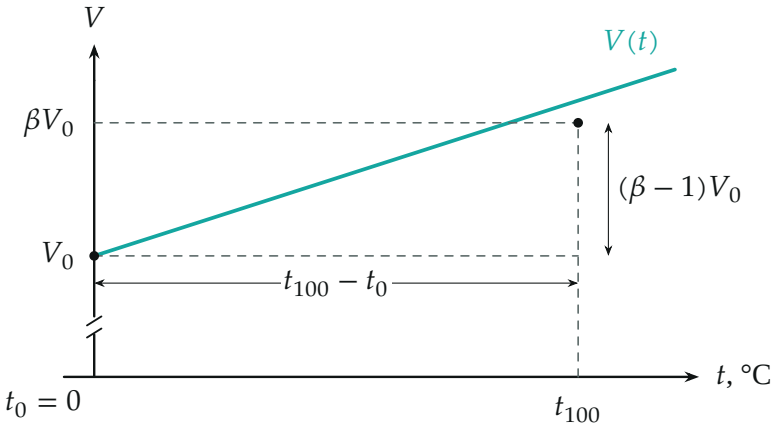
2. Уравнение прямой по двум точкам. При линейной зависимости объём растёт на одну и ту же величину при нагреве на каждый градус. Между t_0 и t_{100} объём вырос на $\beta V_0 - V_0 = (\beta - 1)V_0$, значит на один градус

$$k = \frac{(\beta - 1)V_0}{t_{100} - t_0}.$$

Объём при произвольной температуре t равен объёму при t_0 плюс прирост на $t - t_0$ градусов:

$$V(t) = V_0 + k\,(t - t_0) = \frac{m}{\rho}\left(1 + (\beta - 1)\,\frac{t - t_0}{t_{100} - t_0}\right).$$

Знак: при $t > t_0$ объём больше V_0, при $t < t_0$ — меньше, прямая продолжается в обе стороны, как и на рисунке условия. Формула верна, пока зависимость остаётся линейной.



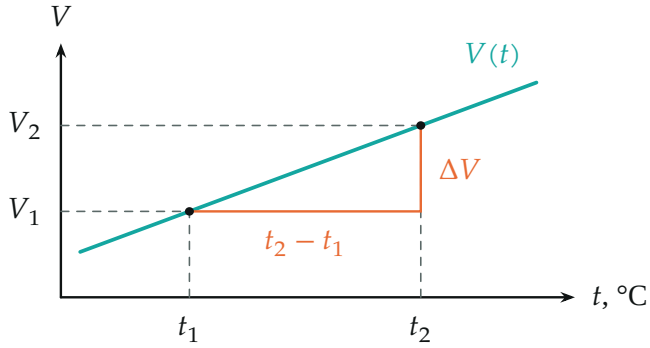
Прямая через две точки. Ось V начинается не с нуля (перерыв на оси), а наклон условно увеличен: на деле $\beta - 1$ всего 0,018. Горизонтальный катет — $t_{100} - t_0$, вертикальный — $(\beta - 1)V_0$.

Пункт 2.

3. Приращение между отметками. Подставим t_2 и t_1 в формулу для $V(t)$ и вычтем; слагаемое V_0 сокращается, остаётся только наклон:

$$\Delta V = V(t_2) - V(t_1) = k\,(t_2 - t_1) = \frac{m}{\rho}\,(\beta - 1)\,\frac{t_2 - t_1}{t_{100} - t_0}.$$

То же видно из подобия треугольников на графике: малый треугольник с катетами $t_2 - t_1$ и ΔV подобен большому с катетами $t_{100} - t_0$ и $(\beta - 1)V_0$, поэтому $\dfrac{\Delta V}{t_2 - t_1} = \dfrac{(\beta - 1)V_0}{t_{100} - t_0}$.



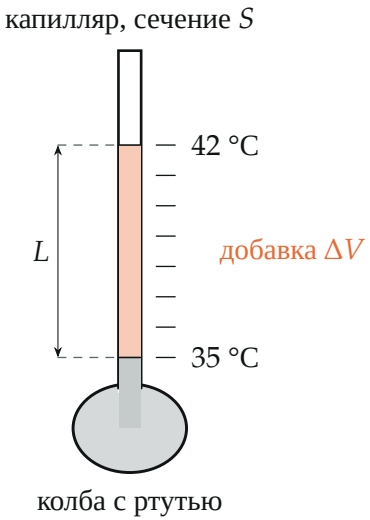
Приращение объёма между t_1 и t_2 — вертикальный катет малого треугольника, он подобен большому треугольнику предыдущего рисунка.

Числа. Масса $m = 2$ г, плотность $\rho = 13{,}6$ г/см^3, значит $V_0 = \dfrac{2}{13{,}6} \approx 0{,}147$ см^3. В мм^3: 1 см^3 $= 1000$ мм^3, поэтому $V_0 \approx 147{,}1$ мм^3. Тогда

$$\Delta V = 147{,}1 \cdot 0{,}018 \cdot \frac{7}{100} \approx 0{,}185 \text{ мм}^3 \approx 1{,}85 \cdot 10^{-1} \text{ мм}^3.$$

Пункт 3.

4. Куда уходит приращение объёма. Стекло не расширяется, колба с ртутью имеет постоянный объём, и всё приращение ΔV уходит в капилляр: мениск ртути поднимается от отметки t_1 до отметки t_2. Добавка ртути — цилиндр с основанием, равным сечению капилляра S, и высотой, равной смещению мениска, то есть расстоянию между отметками L.



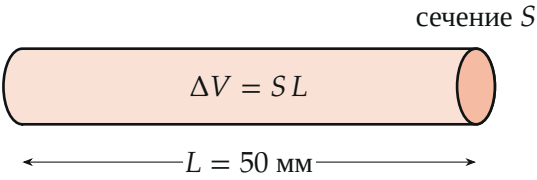
Термометр между отметками 35 и 42 °C. Серым закрашена ртуть, которая заполняла капилляр при t_1, красным — добавка ΔV при нагреве до t_2; расстояние между отметками L. Масштаб деталей условный.

5. Объём цилиндра. Объём цилиндра равен площади основания, умноженной на высоту:

$$\Delta V = S\,L \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\Delta V}{L}.$$

Здесь надо привести единицы к одним: $L = 5$ см $= 50$ мм, а ΔV уже в мм^3:

$$S = \frac{0{,}185\ \text{мм}^3}{50\ \text{мм}} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{мм}^2.$$



Добавка ртути — цилиндр: площадь основания S, длина L.

Обратите внимание: сечение нельзя найти, не переведя сантиметры в миллиметры. Объём в мм^3 делится на длину в мм, а если взять сантиметры, ответ получится неверным в десять раз.

Проверка. Размерность: мм^3/мм = мм^2. Правдоподобие: относительное расширение ртути на градус $(\beta - 1)/(t_{100} - t_0) = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$ — известный табличный коэффициент объёмного расширения ртути. Диаметр капилляра $d = \sqrt{4S/\pi} \approx 0{,}07$ мм — как толщина волоса, что и есть в тонких ртутных термометрах. Второй способ для ΔV: $\Delta V = V_0 \cdot \dfrac{(\beta - 1)(t_2 - t_1)}{t_{100} - t_0}$, то есть ртуть увеличивается на 0,0013 своего объёма: $147{,}1 \cdot 0{,}00126 \approx 0{,}185$ мм^3. Смысл: объём ртути почти не меняется, но тончайший капилляр превращает крошечное приращение в заметное удлинение столбика — 5 см.

Ответ. 1) $V(t) = \dfrac{m}{\rho}\left(1 + (\beta - 1)\dfrac{t - t_0}{t_{100} - t_0}\right)$; 2) $\Delta V = \dfrac{m}{\rho}(\beta - 1)\dfrac{t_2 - t_1}{t_{100} - t_0} \approx 1{,}85 \cdot 10^{-1}$ мм^3; 3) $S = \dfrac{\Delta V}{L} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-3}$ мм^2.