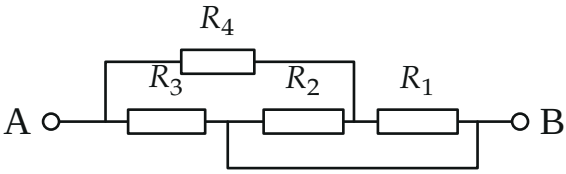
Цепь из четырёх резисторов

Задача 5. [Физтех 2023/24, 9 класс, варианты 09-01–09-02, задача 5] В цепи, схема которой представлена на рисунке к задаче, сопротивления резисторов $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 6$ Ом.



1. Найдите эквивалентное сопротивление $R_{\text{экв}}$ цепи.

Контакты A и B подключают к источнику постоянного напряжения $U = 10$ В.

2. Найдите мощность P, которая рассеивается на всей цепи.
3. На каком резисторе рассеивается наименьшая мощность? Найдите эту наименьшую мощность $P_{\min}$.

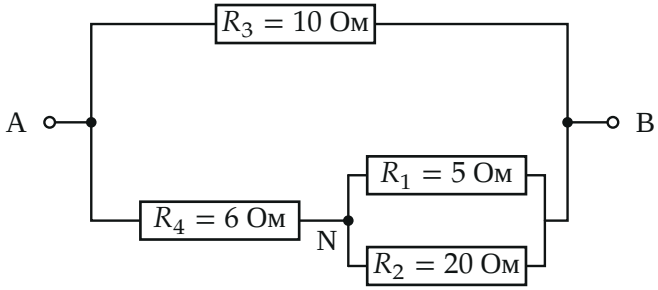
▲ **Решение. Что происходит.** Схема нарисована так, что провода идут вперемешку, и «на глаз» не видно, кто с кем соединён последовательно, а кто параллельно. Поэтому сначала находим узлы: участок провода без элементов — это одна точка, и на всём участке потенциал один. Когда узлы названы, цепь превращается в обычное «параллельно–последовательно», и сопротивление считаем сворачиванием: два параллельных резистора заменяем одним, два последовательных — одним. Мощность на участке считаем по формулам для постоянного тока, а сравнивать резисторы удобно по напряжению и току на каждом.

Обозначения. A и B — контакты цепи; N — узел, в котором сходятся R_4, R_1 и R_2; R_{12} — сопротивление параллельно соединённых R_1 и R_2; R_{124} — сопротивление ветви $R_4 + R_{12}$; I_k, U_k, P_k — ток, напряжение и мощность на резисторе R_k.

Пункт 1.

1. Узлы схемы. Левые концы R_3 и R_4 присоединены к контакту A. Нижний провод соединяет точку между R_3 и R_2 с правым концом R_1, а

этот конец ведёт к контакту B: значит, правый конец R_3 и левый конец R_2 тоже в точке B. Правый конец R_4, правый конец R_2 и левый конец R_1 соединены верхним проводом — это узел N.



Та же схема, переложенная по узлам: между A и B включены R_3 и ветвь R_4–N, а от N к B идут два параллельных резистора R_1 и R_2. Закрашены узлы.

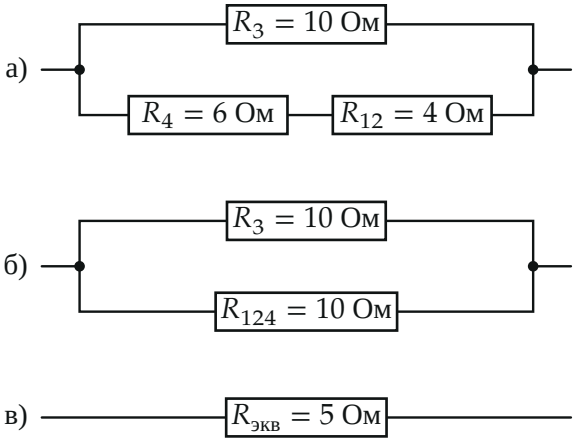
2. Резисторы R_1 и R_2. Оба присоединены одним концом к узлу N, другим — к B, то есть к одной и той же паре узлов: соединены параллельно. При параллельном соединении складываются обратные сопротивления (проводимости):

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}, \qquad R_{12} = 4 \text{ Ом}.$$

3. Ветвь R_4 + R_{12}. Ток от A к B по этой ветви идёт через R_4 и затем через пару R_1, R_2: последовательно, сопротивления складываются: $R_{124} = R_4 + R_{12} = 6 + 4 = 10$ Ом.

4. Вся цепь. Ветвь R_{124} и резистор R_3 включены между одними и теми же контактами A и B — параллельно:

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_{124}R_3}{R_{124} + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ Ом}.$$



Сворачивание схемы: а) $R_1 \parallel R_2$ заменены на R_{12}; б) $R_4 + R_{12} = R_{124}$; в) $R_3 \parallel R_{124} = R_{экв}$. Контакты A слева, B справа.

Пункт 2.

5. Мощность на всей цепи. Цепь с сопротивлением $R_{экв}$ под напряжением U рассеивает мощность (мощность постоянного тока $P = U^2/R$):

$$P = \frac{U^2}{R_{экв}} = \frac{10^2}{5} = 20 \text{ Вт}.$$

Пункт 3.

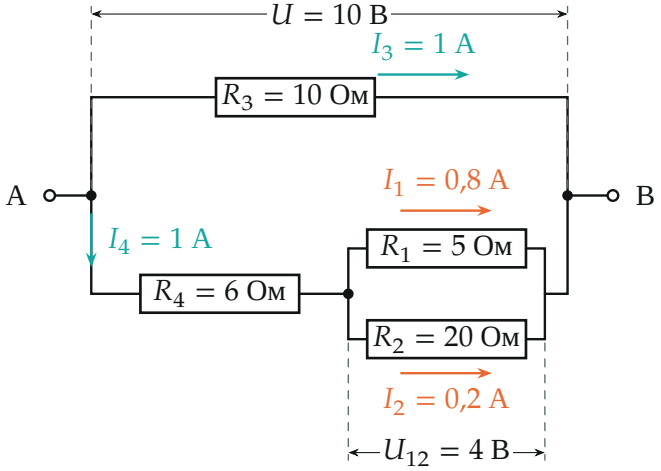
6. Напряжения и токи. Идём по схеме от целого к частям, на каждом шаге — закон Ома для участка цепи. Напряжение на R_3 и на ветви R_{124} одно и то же, равное $U = 10$ В, ведь обе между A и B:

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = 1 \text{ А}, \qquad I_4 = \frac{U}{R_{124}} = 1 \text{ А}.$$

Ток I_4 идёт по ветви последовательно, значит он же проходит через R_4 и разделяется между R_1 и R_2. Напряжение на паре R_1, R_2 одно: $U_{12} = I_4 R_{12} = 1 \cdot 4 = 4$ В. Токи в них:

$$I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} = 0{,}8 \text{ А}, \qquad I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = 0{,}2 \text{ А}.$$

Проверка узла N: $I_1 + I_2 = 1 \text{ А} = I_4$ (заряд в узле не накапливается).

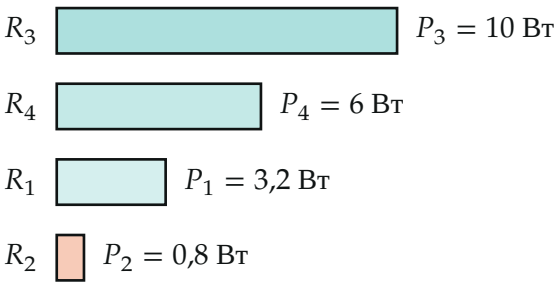


Токи и напряжения в цепи при $U = 10$ В.

7. Мощности на каждом резисторе. Мощность постоянного тока на резисторе $P_k = I_k U_k$ или $I_k^2 R_k$:

$$P_3 = I_3 U = 10 \text{ Вт}, \quad P_4 = I_4^2 R_4 = 6 \text{ Вт},$$
$$P_1 = \frac{U_{12}^2}{R_1} = 3{,}2 \text{ Вт}, \quad P_2 = \frac{U_{12}^2}{R_2} = 0{,}8 \text{ Вт}.$$

Сумма $10 + 6 + 3{,}2 + 0{,}8 = 20$ Вт совпадает с P из пункта 2: закон сохранения энергии выполнен.



Мощности на резисторах; наименьшая — на R_2.

8. Сравнение. Наименьшая мощность на R_2. Обоснуем по ходу цепи, не считая лишнего: R_1 и R_2 под одним напряжением, а $P = U^2/R$ меньше там, где R больше, значит $P_2 < P_1$. Через R_4 идёт ток 1 А, а через

R_2 только 0,2 А, при этом напряжение на R_4 тоже больше (6 В против 4 В), поэтому $P_4 > P_2$. Через R_3 тот же ток 1 А и напряжение 10 В — ещё больше. Итак, $P_{\min} = P_2 = 0{,}8$ Вт.

Обратите внимание: нельзя выбирать минимум по одной величине — по сопротивлению или по току. У R_2 самое большое сопротивление, но ему досталось и малое напряжение, и малый ток; именно произведение UI решает.

Проверка. Размерность: U^2/R — $\text{В}^2/\text{Ом} = \text{Вт}$. Предельный случай: если бы $R_3 \to \infty$ (резистор убрали), $R_{\text{экв}} = R_{124} = 10$ Ом, мощность упала бы вдвое — пропала бы именно та часть мощности, которая теперь идёт в R_3: 10 из 20 Вт. Второй способ для P: $I = I_3 + I_4 = 2$ А, $P = UI = 20$ Вт, как и по $U^2/R_{\text{экв}}$. Смысл: параллельные ветви с одинаковым сопротивлением 10 Ом делят ток поровну, и общее сопротивление вдвое меньше каждого.

Ответ. 1) $R_{\text{экв}} = 5$ Ом; 2) $P = 20$ Вт; 3) наименьшая мощность на R_2: $P_{\min} = 0{,}8$ Вт.