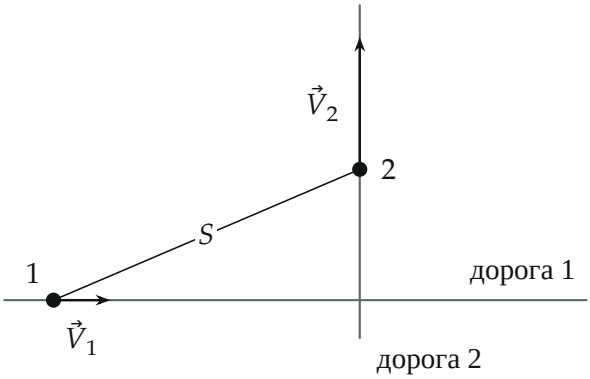
Два мотоциклиста на перпендикулярных дорогах

Задача 1. [Физтех 2023/24, 9 класс, варианты 09-03–09-04, задача 1] Два мотоциклиста едут по двум взаимно перпендикулярным дорогам. Первый мотоциклист движется со скоростью $V_1 = 15$ м/с, второй мотоциклист движется с неизвестной скоростью V_2. В некоторый момент времени расстояние между мотоциклистами стало наименьшим и равным $S = 220$ м. Через $T = 10$ с расстояние между мотоциклистами удвоилось.

1. Найдите скорость V_2 второго мотоциклиста.
2. С какой скоростью V_R увеличивается в этот момент расстояние между мотоциклистами?



Поясняющий рисунок: вид сверху в момент наименьшего расстояния. Отрезок S — между мотоциклистами; дороги перпендикулярны.

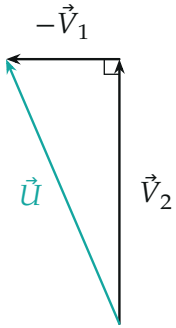
▲ **Решение.** **Что происходит.** Расстояние между мотоциклистами меняется, потому что они движутся по разным дорогам. Удобно перейти в систему отсчёта первого мотоциклиста. Зачем: в ней он стоит на месте, а второй мотоциклист движется по прямой с постоянной скоростью $\vec{U} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ (относительная скорость). Тогда расстояние между ними — это расстояние от неподвижной точки до точки, бегущей по прямой, и наименьшим оно будет тогда, когда отрезок между ними перпендикулярен этой прямой. Отсюда прямоугольный треугольник, а в нём всё считается теоремой Пифагора.

Обозначения. $t = 0$ — момент наименьшего расстояния S, $R(t)$ — расстояние между мотоциклистами в момент t, $R(T) = 2S$. Модуль относительной скорости U постоянен. Скорость V_R — в момент $t = T$ (в момент наименьшего расстояния она равна нулю, поэтому вопрос именно про момент удвоения).

Пункт 1.

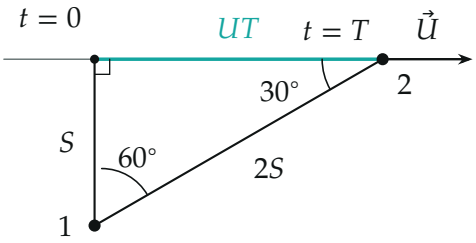
1. Относительная скорость. Дороги перпендикулярны, значит, и векторы $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ перпендикулярны (в какую бы сторону каждый ни ехал). Вычитать их — то же, что складывать $\vec{V}_2$ и $-\vec{V}_1$: получается гипотенуза прямоугольного треугольника, поэтому

$$U^2 = V_1^2 + V_2^2.$$



Относительная скорость второго мотоциклиста: $\vec{U} = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$.

2. Движение в системе отсчёта первого мотоциклиста. Второй мотоциклист движется по прямой со скоростью U. Пусть в момент $t = 0$ он в точке K, ближайшей к первому: $M_1K = S$, и по самому смыслу «ближайшая» отрезок M_1K перпендикулярен прямой движения (перпендикуляр — кратчайший путь от точки до прямой). Через T он в точке L: $KL = UT$, а $M_1L = 2S$ (расстояние удвоилось).



Система отсчёта первого мотоциклиста: он неподвижен в нижней точке, второй движется по прямой слева направо.

В прямоугольном треугольнике M_1KL применим теорему Пифагора (катеты S и UT, гипотенуза $2S$):

$$S^2 + (UT)^2 = (2S)^2 \quad \Rightarrow \quad UT = \sqrt{3}\,S, \qquad U = \sqrt{3}\,\frac{S}{T} \approx 38{,}1 \text{ м/с}.$$

Заодно углы: катет S вдвое короче гипотенузы, значит, он лежит против угла $30°$.

3. Скорость второго. Из шага 1: $V_2 = \sqrt{U^2 - V_1^2} = \sqrt{3S^2/T^2 - V_1^2} = \sqrt{1452 - 225} = \sqrt{1227} \approx 35$ м/с.

Второй способ для шага 2 — в системе отсчёта дороги. Пусть в какой-то момент мотоциклисты расположены так, что их координаты относительно перекрёстка равны $(x_1, 0)$ и $(0, y_2)$. Квадрат расстояния — квадратный трёхчлен по времени (A и B — постоянные):

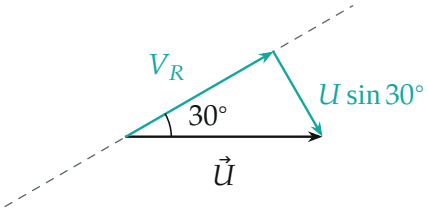
$$R^2 = (x_1 + V_1 t)^2 + (y_2 + V_2 t)^2 = A + Bt + (V_1^2 + V_2^2)\,t^2,$$

Выделив полный квадрат, получаем $R^2 = S^2 + U^2(t - t_0)^2$ с $U^2 = V_1^2 + V_2^2$, где S — наименьшее расстояние. Через T после минимума $4S^2 = S^2 + U^2T^2$ — то же уравнение, что и выше.

Пункт 2.

4. Что значит «расстояние растёт». В системе отсчёта первого мотоциклиста второй движется со скоростью $\vec{U}$ в точке L. Разложим $\vec{U}$ на составляющую вдоль M_1L (от первого мотоциклиста) и перпендикулярную ей. Вдоль M_1L точка удаляется, а перпендикулярная составляющая сдвигает её по окружности радиуса R, расстояние за малое время почти

не меняется. Угол между $\vec{U}$ и M_1L — это угол при вершине L треугольника, то есть $30°$.



Разложение $\vec{U}$ в точке L. Пунктир — продолжение отрезка от первого мотоциклиста; $V_R = U\cos 30°$.

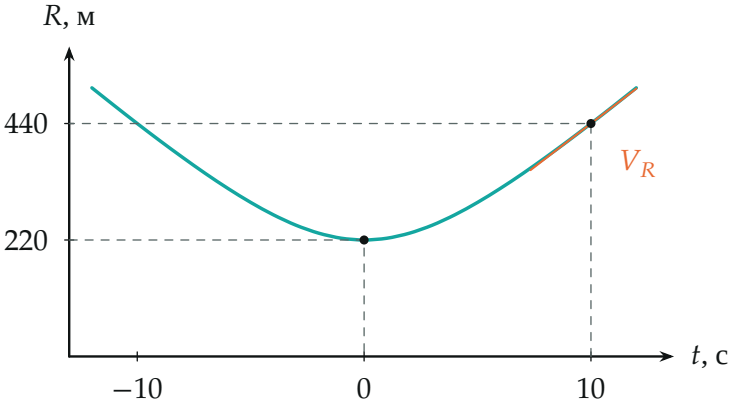
$$V_R = U\cos 30° = \sqrt{3}\,\frac{S}{T}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\,\frac{S}{T} = \frac{3}{2}\cdot\frac{220}{10} = 33 \text{ м/с}.$$

Обратите внимание: скорость роста расстояния не равна U — пока второй мотоциклист не «убежал» далеко, он уходит не точно от первого, а вбок. Равенство $V_R \to U$ получилось бы только при $t \to \infty$.

Второй способ — без картинки с углом. Возьмём малое время Δt после $t = T$ и запишем $R^2 = S^2 + U^2t^2$ для $t = T$ и $t = T + \Delta t$. Вычитая, $2R\,\Delta R + (\Delta R)^2 = 2U^2T\,\Delta t + U^2(\Delta t)^2$. При малом Δt квадратами малых приращений пренебрегаем, поэтому

$$V_R = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{U^2T}{R} = \frac{3S^2/T^2\cdot T}{2S} = \frac{3}{2}\,\frac{S}{T} = 33 \text{ м/с},$$

как и выше.



Расстояние между мотоциклистами; время отсчитано от момента наименьшего расстояния. Наименьшее расстояние $S = 220$ м, через 10 с — $2S = 440$ м. Касательная (морковная) в этой точке имеет наклон V_R.

Проверка. Размерность: S/T — метры на секунду. Для заданных чисел $U \approx 38{,}1$ м/с $> V_1 = 15$ м/с — значит, V_2 определяется (под корнем положительное число). Знак V_R: положителен, расстояние растёт. Смысл: наименьшее расстояние S достигается, когда относительная скорость перпендикулярна линии, соединяющей мотоциклистов; через время T получается треугольник «30–60–90».

Ответ. 1) $V_2 = \sqrt{3S^2/T^2 - V_1^2} \approx 35$ м/с; 2) $V_R = \dfrac{3}{2}\dfrac{S}{T} = 33$ м/с.