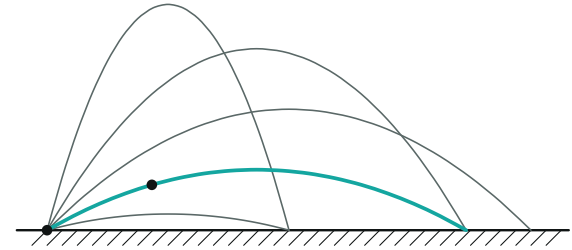
Осколки фейерверка на площадке

Задача 2. [Физтех 2023/24, 9 класс, варианты 09-03–09-04, задача 2] Находящийся на горизонтальной площадке фейерверк разрывается на множество осколков, летящих с одинаковой по модулю скоростью во всевозможных направлениях. Через время $\tau = 1$ с после разрыва один из осколков находился на высоте $h = 15$ м и на расстоянии $l = 34{,}6$ м по горизонтали от точки старта. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

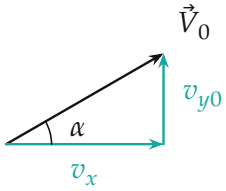
1. Определите продолжительность T полёта этого осколка.
2. Найдите наибольшую высоту полёта этого осколка.
3. Найдите начальную скорость V_0 осколков.
4. Найдите площадь S круга, на который упали осколки.



Поясняющий рисунок: осколки летят в одной плоскости под разными углами (серые), бирюзовым — осколок из условия; точка — его положение через τ.

▲ **Решение. Что происходит.** Каждый осколок — тело, брошенное под углом к горизонту: по горизонтали он летит равномерно, по вертикали — с ускорением g вниз. Про один из осколков известно, где он был через τ: это два уравнения (по x и по y) для двух неизвестных — проекций начальной скорости. Найдя их, получаем и время полёта, и высоту, и V_0. Площадку засыпают все осколки: они летят во всевозможных направлениях, поэтому место падения зависит от угла броска, и нужна наибольшая дальность — она и даёт радиус круга.

Обозначения. Ось x — горизонтально, в плоскости полёта осколка из условия, от места разрыва; ось y — вверх; начало — место разрыва, оно же на площадке. Зачем так: тогда $a_x = 0, a_y = -g$, и движение по каждой оси считается отдельно. v_x, v_{y0} — проекции начальной скорости, α — угол броска, $V_0 = \sqrt{v_x^2 + v_{y0}^2}$.



Проекции начальной скорости осколка из условия: $v_x = l/\tau$, $v_{y0} = h/\tau + g\tau/2$.

Пункт 1.

1. Начальная скорость осколка по осям. Через время τ осколок прошёл по горизонтали l и поднялся на h. Равномерное движение по x и равноускоренное по y:

$$l = v_x\tau, \qquad h = v_{y0}\tau - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_x = \frac{l}{\tau} = 34{,}6 \text{ м/с}, \qquad v_{y0} = \frac{h}{\tau} + \frac{g\tau}{2} = 15 + 5 = 20 \text{ м/с}.$$

Знак $v_{y0} > 0$: осколок вылетел вверх; через τ его вертикальная скорость $20 - 10 = 10$ м/с, он ещё поднимается.

2. Время полёта. Осколок возвращается на площадку, когда $y = 0$: $v_{y0}t - gt^2/2 = 0$. Корень $t = 0$ — момент разрыва, второй корень — падение:

$$T = \frac{2v_{y0}}{g} = 2\left(\frac{h}{g\tau} + \frac{\tau}{2}\right) = 4 \text{ с}.$$

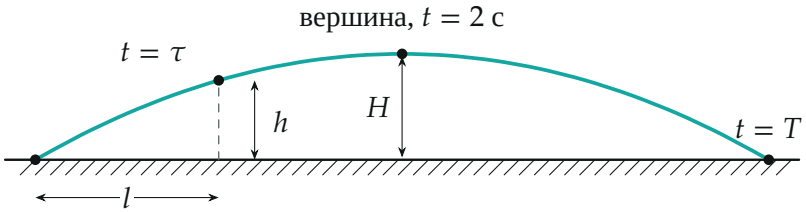
Подъём и спуск при этом длятся поровну, по 2 с: падение на ту же площадку, с которой стартовали.

Пункт 2.

3. Наибольшая высота. В вершине $v_y = 0$, это случается через $v_{y0}/g = T/2 = 2$ с. Из того же уравнения движения

$$H = \frac{v_{y0}^2}{2g} = \frac{400}{20} = 20 \text{ м}.$$

Второй способ: от вершины осколок свободно падает без начальной вертикальной скорости за $T/2$: $H = \frac{g}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2 = 5 \cdot 4 = 20$ м.



Осколок из условия в одном масштабе по обеим осям: за 4 с он пролетает около 139 м и поднимается на 20 м.

Пункт 3.

4. Начальная скорость. Модуль складывается из проекций:

$$V_0 = \sqrt{v_x^2 + v_{y0}^2} = \sqrt{34{,}6^2 + 20^2} \approx 40 \text{ м/с}.$$

Проверка: $\operatorname{tg}\alpha = v_{y0}/v_x \approx 0{,}58$, то есть $\alpha = 30°$; тогда $V_0 \cos 30° = 40 \cdot 0{,}866 \approx 34{,}6$ м/с — как и l/τ.

Пункт 4.

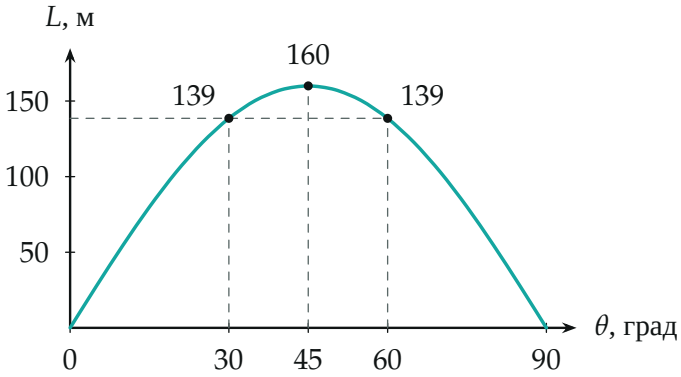
5. Дальность осколка под любым углом. Все осколки имеют одну и ту же скорость V_0, но разный угол θ с горизонтом. Для осколка под углом θ (формулы шага 2 с $v_{y0} = V_0 \sin\theta$, $v_x = V_0 \cos\theta$):

$$L(\theta) = v_x T = V_0 \cos\theta \cdot \frac{2V_0 \sin\theta}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}.$$

Синус не больше единицы, поэтому наибольшая дальность — при $2\theta = 90°$, то есть $\theta = 45°$:

$$L_{\max} = \frac{V_0^2}{g} = \frac{1600}{10} = 160 \text{ м}.$$

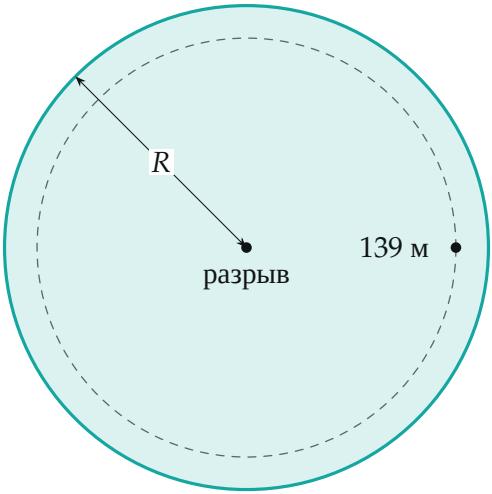
При угле меньше 45° или больше дальность меньше; для каждого расстояния от 0 до 160 м есть два угла (θ и $90° - \theta$, у осколка из условия 30° и 60° — оба дают 139 м).



Дальность полёта в зависимости от угла броска. Максимум 160 м — при 45°; значение 139 м получается при 30° и 60°.

6. Круг падения. Осколки летят во все стороны, и в каждом направлении по горизонтали (по азимуту) выпадают осколки со всеми углами θ от 0 до 45° — а значит, со всеми расстояниями от 0 до 160 м. Осколки, брошенные вниз, падают сразу. Поэтому осколки покрывают круг радиуса $R = V_0^2/g = 160$ м с центром в месте разрыва:

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{V_0^2}{g} \right)^2 \approx 3{,}14 \cdot 160^2 \approx 8 \cdot 10^4 \text{ м}^2.$$



Вид сверху: осколки падают на круг радиуса $R = 160$ м; пунктир — расстояние, на которое улетает осколок из условия.

Проверка. Размерность: V_0^2/g — $(\text{м/с})^2$ на м/с^2, то есть метры. Второй способ для R: осколок падает на расстоянии L, если при $x = L$

$$0 = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2V_0^2}\left(1 + \tan^2\theta\right);$$

это квадратное уравнение для $\tan\theta$ имеет решение, только если его дискриминант $L^2 - g^2L^4/V_0^4$ не отрицателен, то есть $L \le V_0^2/g$ — тот же радиус. Смысл: достаточно знать, где был один осколок в один момент, чтобы найти его скорость, а значит, и границу круга падения всех осколков.

Ответ. 1) $T = 2\left(\dfrac{h}{g\tau} + \dfrac{\tau}{2}\right) = 4$ с; 2) $H = 20$ м; 3) $V_0 \approx 40$ м/с; 4) $S = \pi\left(\dfrac{V_0^2}{g}\right)^2 \approx 8 \cdot 10^4$ м^2.