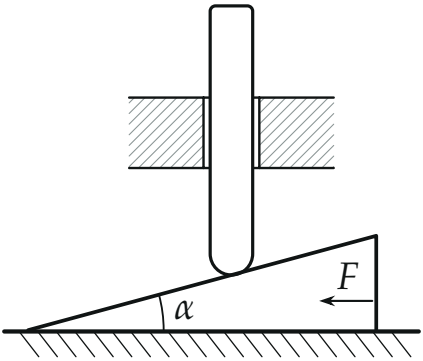
Клин и стержень по вертикали

Задача 3. [Физтех 2023/24, 9 класс, варианты 09-03–09-04, задача 3] Клин с углом при вершине $\alpha = 30°$ находится на горизонтальной поверхности. Однородный стержень, который может свободно перемещаться только по вертикали, касается наклонной плоскости клина (см. рис.). К клину приложена горизонтальная сила, удерживающая клин и стержень в покое. Массы стержня и клина одинаковы и равны $m = 0{,}5$ кг. Все поверхности гладкие. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1. Найдите горизонтальную силу F, которой систему удерживают в покое.

Силу F снимают, клин и стержень приходят в поступательное прямолинейное движение с нулевой начальной скоростью. После перемещения по вертикали на $H = 0{,}6$ м стержень абсолютно упруго сталкивается с горизонтальной поверхностью.

2. Найдите перемещение h стержня после соударения до первой остановки.
3. Найдите ускорение a клина в процессе разгона.
4. При каком значении угла α ускорение клина максимальное?
5. Найдите максимальное ускорение $a_{\max}$ клина.

▲ **Решение. Что происходит.** Стержень движется только вертикально, клин — только горизонтально, но они давят друг на друга, поэтому дви-

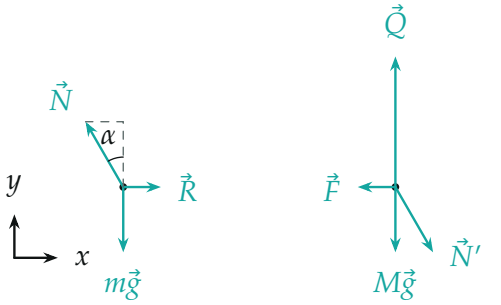
жения связаны: стержень остаётся на наклонной плоскости. В покое сила F уравновешивает горизонтальную составляющую давления стержня. После снятия F стержень опускается и толкает клин вбок; оба разгоняются с постоянными ускорениями. Потерь энергии нет (поверхности гладкие, удар упругий), поэтому скорости найдём из сохранения энергии. После удара о стол стержень летит вверх свободно, клин уезжает дальше с той же скоростью, контакт теряется.

Обозначения. Ось x — вправо (туда, куда поедет клин), ось y — вверх. N — модуль силы давления между стержнем и клином, R — горизонтальная сила направляющей на стержень, Q — реакция стола на клин; $V_{ст}$, $V_{кл}$, $a_{ст}$, $a_{кл}$ — модули скоростей и ускорений.

Пункт 1.

1. Стержень. На него действуют тяжесть $m\vec{g}$, реакция клина $\vec{N}$ (перпендикулярно гладкой плоскости, вверх и влево, под углом α к вертикали) и горизонтальная сила $\vec{R}$ направляющей. Условие равновесия в проекции на y (так неизвестная R выпадает):

$$N\cos\alpha - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$



стержень (тело m) клин (тело $M = m$)

Силы на стержень и на клин (длины стрелок согласованы). Пунктиром — составляющие силы N на стержень: вертикальная $N\cos\alpha$ равна mg, горизонтальная $N\sin\alpha$ уравновешена силой R.

2. Клин. Стержень давит на клин с силой $\vec{N}'$, $N' = N$ (третий закон Ньютона), вниз и вправо; ещё действуют $M\vec{g}$, $\vec{Q}$ (вертикальные) и $\vec{F}$ влево. Условие равновесия в проекции на x (вертикальные силы выпадают):

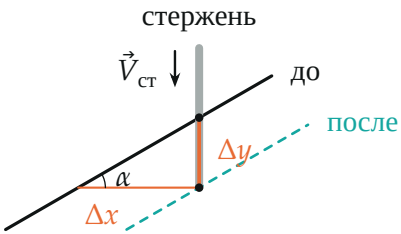
$$N\sin\alpha - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = mg\tan\alpha = 0{,}5\cdot 10\cdot\tan 30^\circ \approx 2{,}9\ \text{Н}.$$

Масса клина в ответ не вошла: его вес уравновешен столом.

Пункт 2.

3. Связь движений. Пусть клин сместился вправо на Δx. Плоскость сдвинулась вправо, и высота поверхности под стержнем упала на $\Delta x\tan\alpha$ (катеты треугольника на рисунке): на столько же опускается стержень. Делением на время:

$$V_{\text{ст}} = V_{\text{кл}}\tan\alpha, \qquad a_{\text{ст}} = a_{\text{кл}}\tan\alpha.$$



Поверхность клина до смещения (сплошная) и после смещения вправо на Δx (пунктир). Стержень (серый) остаётся на поверхности и опускается на $\Delta y = \Delta x\tan\alpha$ (красный катет). Точки — положения контакта.

4. Энергия при разгоне. Реакции стола и направляющей перпендикулярны перемещениям, гладкий контакт стержня с клином суммарной работы не совершает, трения нет: механическая энергия системы сохраняется. Потенциальная энергия стержня, опустившегося на H, идёт в кинетическую энергию обоих тел, $V_{\text{кл}} = V_{\text{ст}}/\tan\alpha$:

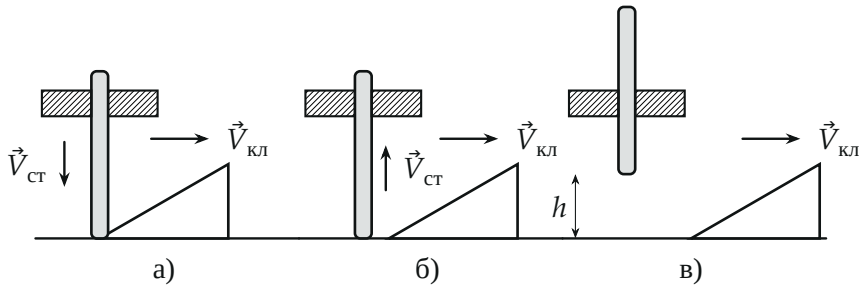
$$mgH = \frac{mV_{\text{ст}}^2}{2}\left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right) = \frac{mV_{\text{ст}}^2}{2\sin^2\alpha},$$

$$V_{\text{ст}}^2 = 2gH\sin^2\alpha = 3\ \text{м}^2/\text{с}^2,$$

$V_{ст} = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ м/с, $V_{кл} = \sqrt{3}/\tan 30° = 3$ м/с (использовано $1 + \cot^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$).

5. Удар и отрыв. Сначала поймём, где стержень встречает стол. Пока он едет по клину, сила давления $N = mg\cos\alpha > 0$ (её найдём в пункте 6) — контакт не теряется, и нижний конец стержня всё время на наклонной плоскости. Высота плоскости равна нулю только у острого края, значит, стол стержень встречает ровно тогда, когда под него подъезжает острый край клина; это следствие связи, а не дополнительное допущение. Стол гладкий, удар упругий: сила удара вертикальна, и стержень полетит вверх с тем же модулем скорости $V_{ст}$. Клин в ударе не участвует (сила между стержнем и клином конечна, её импульс за время удара пренебрежимо мал) и едет вправо с постоянной $V_{кл}$. Поверхность клина под стержнем уходит вниз со скоростью $V_{кл}\tan\alpha = V_{ст}$, а стержень поднимается: они расходятся, $N = 0$, на стержень действует одна тяжесть. До остановки (скорость нуль) энергия стержня сохраняется:

$$mgh = \frac{mV_{ст}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V_{ст}^2}{2g} = H\sin^2\alpha = 0{,}6 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}15 \text{ м}.$$



Этапы: а) стержень в момент удара о стол, острый край клина под ним; б) сразу после удара: стержень летит вверх, клин уезжает вправо, контакта нет; в) стержень в верхней точке (скорость нулевая), поднялся на h. Масштаб условный.

Пункт 3.

6. Второй закон Ньютона. Клин, проекция на x: $m\,a_{кл} = N\sin\alpha$. Стержень, проекция на вертикаль вниз: $m\,a_{ст} = mg - N\cos\alpha$ (N при

движении уже не равна $mg/\cos\alpha$). Подставим $N = ma_{кл}/\sin\alpha$ и $a_{ст} = a_{кл}\tan\alpha$:

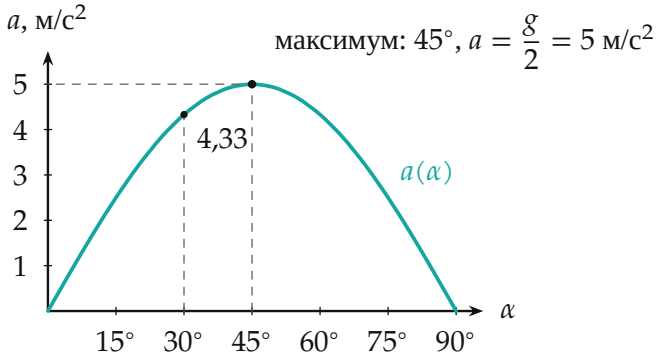
$$a_{кл}\left(\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}\right) = g, \qquad \tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$a = g\sin\alpha\cos\alpha = 10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}33\ \text{м/с}^2.$$

Обратите внимание: при движении $N = mg\cos\alpha \approx 4{,}3$ Н, меньше статических $mg/\cos\alpha \approx 5{,}8$ Н: падающий стержень давит слабее, чем стоящий.

Пункт 4.

7. Максимум по углу. $a = g\sin\alpha\cos\alpha = \frac{g}{2}\sin 2\alpha$; синус двойного угла наибольший, равный 1, при $2\alpha = 90°$: $\alpha = 45°$.



Ускорение клина $a = \frac{g}{2}\sin 2\alpha$ в зависимости от угла; отмечены $\alpha = 30°$ (условие задачи, 4,33 м/с^2) и максимум при 45°.

Пункт 5.

8. Значение максимума. При $\alpha = 45°$ $\sin 2\alpha = 1$, $a_{max} = \frac{g}{2} = 5$ м/с^2 (и $a_{ст} = a_{кл}$, так как $\tan\alpha = 1$).

Проверка. Второй способ для a: клин проходит $H/\tan\alpha$ со скоростью $V_{кл}^2 = 2gH\cos^2\alpha$, значит $a = V_{кл}^2\tan\alpha/(2H) = g\sin\alpha\cos\alpha$. Предел $\alpha \to 0$ или 90°: горизонтальной силы нет, $a \to 0$; максимум между. Для h: $a_{ст} = g\sin^2\alpha$, $V_{ст}^2 = 2a_{ст}H$, $h = V_{ст}^2/2g = H\sin^2\alpha$. Смысл: пока

стержень тащит клин, он падает медленнее свободного, а после удара поднимается на $\sin^2\alpha = 1/4$ высоты падения: часть энергии осталась у клина.

Ответ. 1) $F = mg\tan\alpha \approx 2{,}9$ Н; 2) $h = H\sin^2\alpha = 0{,}15$ м; 3) $a = g\sin\alpha\cos\alpha \approx 4{,}33$ м/с^2; 4) $\alpha = 45°$; 5) $a_{\max} = \dfrac{g}{2} = 5$ м/с^2.