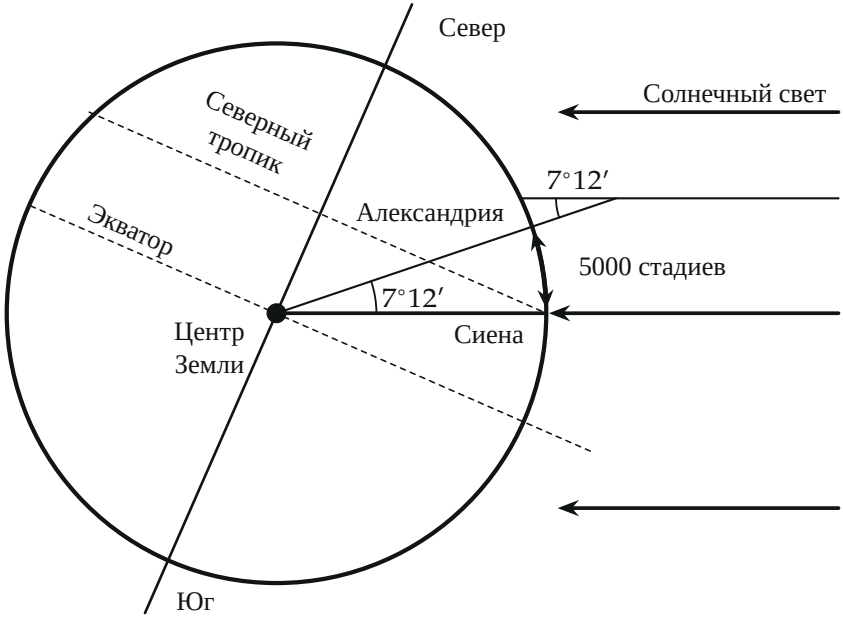
Эратосфен и полёт самолёта

Задача 4. [Физтех 2023/24, 9 класс, варианты 09-03–09-04, задача 4] Греческий математик, астроном Эратосфен приблизительно в 240 г до н. э. вычислил радиус Земли и длину земного экватора. Эратосфен предположил: так как Солнце находится на большом расстоянии, его лучи падают на Землю параллельно. Если Земля плоская, то одинаковые предметы в один и тот же день и час должны отбрасывать одинаковую тень вне зависимости от того, где они находятся. Но тени предметов отличались, следовательно, Земля не была плоской. В полдень в день летнего солнцестояния в Александрии Эратосфен измерил угол, на который солнечные лучи отстоят от вертикали. Этот угол составил 1/50 окружности ($7^\circ 12'$ — семь градусов, 12 угловых минут). Предположив, что Земля имеет форму шара, а Александрия расположена «на одном меридиане» к северу от Сиены, где в полдень солнечные лучи отражаются от поверхности воды на дне глубоких колодцев, Эратосфен вычислил радиус Земли и длину земного экватора. Дуга Александрия — Сиена 5000 стадиев.



1. Какой результат для радиуса R Земли получил Эратосфен? Считайте, что один египетский стадий равен 157,5 м, а $\pi = \dfrac{22}{7}$.

В наши дни МФТИ и аэропорт Шереметьево находятся на широте 56° в Северном полушарии. Студенты МФТИ, специализирующиеся на исследованиях Арктики, вылетают на летающей лаборатории из Шереметьево и летят на север со скоростью $V = 900$ км/ч.

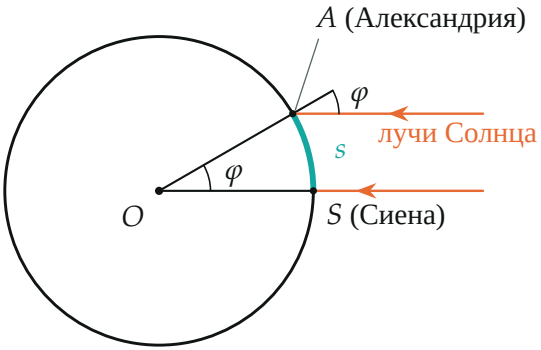
2. По данным задачи найдите продолжительность T полёта из Шереметьево до Северного полюса Земли. В полёте КПД двигателей самолёта составляет $\eta = 20\%$, расход керосина $m_1 = 2000$ кг/ч, теплотворная способность керосина $q = 45 \cdot 10^6$ Дж/кг.
3. Какую силу F тяги развивают двигатели в полёте?

▲ **Решение. Что происходит.** Главная идея: длина дуги окружности пропорциональна центральному углу. По углу $7°12'$ и длине дуги находим длину окружности и радиус; ту же пропорцию применяем к дуге меридиана до полюса и получаем время полёта. Силу тяги даёт баланс энергии: доля η теплоты от сгорания керосина превращается в работу тяги.

Обозначения. s — длина дуги Александрия — Сиена; $\varphi = 7°12'$ — угол, измеренный Эратосфеном; L — длина окружности Земли; L_1 — длина дуги меридиана от Шереметьево до полюса; $N_{\text{пол}}$ — полезная мощность двигателей.

Пункт 1.

1. Угол между лучами и центральный угол. Лучи Солнца параллельны (оно далеко). В Сиене луч идёт вдоль вертикали, то есть вдоль радиуса OS к центру Земли. В Александрии луч параллелен ему, а вертикаль — продолжение радиуса OA. Прямая OA пересекает две параллельные прямые (луч в Сиене и луч в Александрии), и угол между лучом и вертикалью в A равен углу $\angle SOA$ как соответственные углы при параллельных прямых. Значит, центральный угол дуги SA равен измеренному углу φ.



Параллельные лучи Солнца: в Сиене луч идёт вдоль радиуса, в Александрии составляет с вертикалью угол φ; тот же угол — в центре Земли между радиусами OS и OA. Для наглядности угол увеличен (на деле $7°12'$).

2. Пропорция. Длина дуги относится к длине всей окружности так же, как её центральный угол — к полному углу $360°$. Угол $7°12' = 7{,}2° = \dfrac{360°}{50}$ (12 угловых минут — это $12/60 = 0{,}2$ градуса), поэтому

$$\frac{s}{L} = \frac{\varphi}{360°} = \frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad L = 50\,s.$$

Дугу переведём в километры: $s = 5000 \cdot 157{,}5$ м $= 787\,500$ м $= 787{,}5$ км. Длина земной окружности по Эратосфену: $L = 50 \cdot 787{,}5 = 39\,375$ км.

окружность: $360° \leftrightarrow L = 39\,375$ км

дуга $7°12' \leftrightarrow s = 787{,}5$ км, то есть $\dfrac{1}{50}$ окружности

дуга $34° \leftrightarrow L_1 \approx 3720$ км

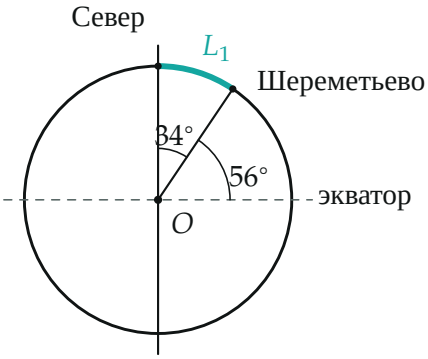
Длина дуги пропорциональна центральному углу; все три отрезка нарисованы в одном масштабе.

3. Радиус. Длина окружности $L = 2\pi R$, откуда при $\pi = \dfrac{22}{7}$

$$R = \frac{L}{2\pi} = \frac{39\,375 \cdot 7}{2 \cdot 22} = \frac{275\,625}{44} \approx 6264 \text{ км}.$$

Пункт 2.

4. Дуга до полюса. Широта 56° — это угол между радиусом, проведённым в точку на поверхности, и плоскостью экватора. От экватора до полюса 90°, значит от Шереметьево до Северного полюса по меридиану $90° - 56° = 34°$. Лететь на север — значит лететь вдоль меридиана, то есть по дуге большого круга. Высота полёта много меньше радиуса Земли, поэтому путь равен дуге на поверхности.



Сечение Земли плоскостью меридиана. Широта 56° отсчитывается от экватора, до Северного полюса остаётся дуга 34°.

5. Длина пути. Применяем ту же пропорцию, что в шаге 2 (по данным задачи — длину окружности Эратосфена):

$$L_1 = \frac{34°}{360°} L = \frac{34}{360} \cdot 39\,375 \text{ км} \approx 3720 \text{ км}.$$

6. Время полёта. Скорость самолёта постоянна, путь равен произведению скорости на время:

$$T = \frac{L_1}{V} = \frac{3720 \text{ км}}{900 \text{ км/ч}} \approx 4{,}1 \text{ ч}.$$

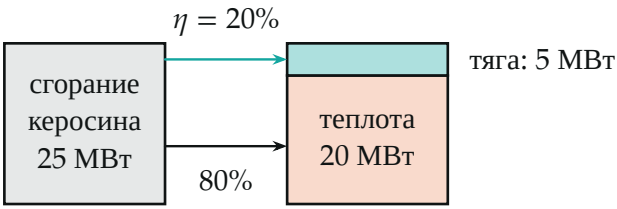
Пункт 3.

7. Энергетический баланс за 1 секунду. Расход керосина $m_1 = 2000$ кг/ч $= \frac{2000}{3600}$ кг/с $= \frac{5}{9}$ кг/с. При сгорании выделяется теплота

$Q_1 = m_1 q$ за каждую секунду, то есть тепловая мощность

$$N_т = m_1 q = \frac{5}{9} \cdot 45 \cdot 10^6 \text{ Вт} = 25 \text{ МВт}.$$

КПД двигателей — доля энергии, превращённая в полезную работу, то есть полезная мощность $N_{пол} = \eta N_т = 0{,}2 \cdot 25 = 5$ МВт. Остальные 20 МВт уходят в теплоту.



Распределение мощности: 20% тепловой мощности идёт в полезную работу тяги, 80% — в теплоту.

8. Сила тяги. Самолёт летит с постоянной скоростью, сила тяги направлена по скорости, поэтому её мощность равна произведению силы на скорость (за время Δt самолёт проходит $V\Delta t$, работа $FV\Delta t$). Полезная мощность двигателей — это и есть FV:

$$FV = \eta m_1 q \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\eta m_1 q}{V}.$$

Скорость в СИ: $V = 900$ км/ч $= 250$ м/с. Подставляем:

$$F = \frac{0{,}2 \cdot \frac{5}{9} \cdot 45 \cdot 10^6}{250} = \frac{5 \cdot 10^6}{250} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н} = 20 \text{ кН}.$$

Обратите внимание: расход дан в кг/ч, скорость — в км/ч. Для ньютонов оба переводим в секунды и метры; если перевести лишь одну величину, ответ неверен в 3,6 раза.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{Вт}}{\text{м/с}} = \frac{\text{Дж/с}}{\text{м/с}} = \text{Н}$. Второй способ для F — за весь полёт: сгорело $m_1 T \approx 8260$ кг керосина, полезная работа $A = \eta m_1 T q \approx 7{,}4 \cdot 10^{10}$ Дж, и $F = A/L_1 \approx 2 \cdot 10^4$ Н, как и выше. Сила в

20 кН для самолёта разумна. Смысл: одна и та же пропорция «дуга — угол» даёт и размер Земли, и путь самолёта.

Ответ. 1) $R \approx 6264$ км; 2) $T \approx 4{,}1$ ч; 3) $F = 20$ кН.