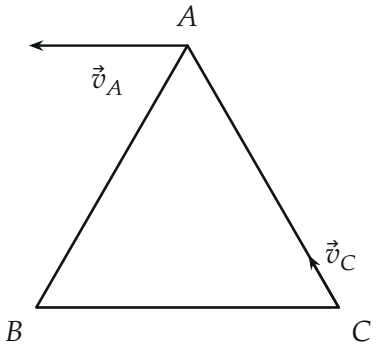
Треугольная пластина на гладком столе

Задача 1. [Физтех 2024/25, 10 класс, варианты 10-01–10-04, задача 1] Вырезанную из однородного листа металла пластину в форме равностороннего треугольника ABC (см. рис.) положили на гладкую горизонтальную плоскость и толкнули. Пластина пришла в движение. В момент $t = 0$ оказалось, что скорость $\vec{v}_A$ точки A параллельна стороне BC и по величине равна $v_A = 0{,}4$ м/с, а скорость $\vec{v}_C$ вершины C направлена вдоль стороны CA. Длины сторон треугольника $a = 0{,}2$ м.



1. Найдите модуль v_C скорости вершины C.
2. За какое время τ пластина в системе центра масс совершит три оборота?

Пчела массой $m = 100$ мг прилетает и садится на пластину вблизи вершины B.

3. Найдите модуль R равнодействующей сил, приложенных к пчеле, сидящей на движущейся пластине. Масса пчелы пренебрежимо мала по сравнению с массой пластины.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на кинематику плоского движения твёрдого тела. Расстояния между точками пластины не меняются, и это связывает $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_C$. Горизонтальных внешних сил нет, поэтому центр масс движется равномерно, а угловая скорость ω постоянна: в системе центра масс пластина просто вращается. Главная идея — найти ω из кинематики один раз; она отвечает и на второй, и на третий вопрос.

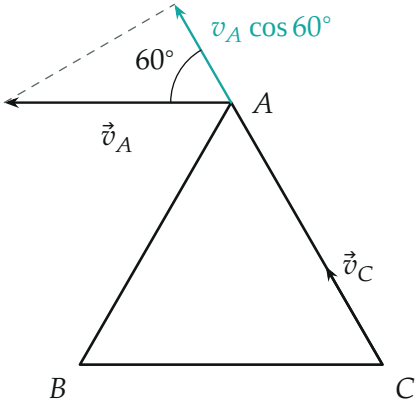
Обозначения. O — центр масс однородной пластины, то есть точка пересечения медиан; $r = OA = OB = OC = a/\sqrt{3}$ — радиус описанной окружности; ω — угловая скорость пластины.

Пункт 1.

1. Проекции скоростей на сторону AC**.** Пластина твёрдая, длина AC не меняется. За малое время dt точки A и C смещаются вдоль AC на (проекцию скорости) $\cdot dt$; будь проекции разными, отрезок AC растягивался бы. Значит, проекции $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_C$ на ось вдоль $C \to A$ равны.

Скорость $\vec{v}_C$ идёт вдоль CA, её проекция равна v_C. Скорость $\vec{v}_A$ параллельна BC и составляет с прямой AC угол $60°$ (угол при вершине C равностороннего треугольника), её проекция — $v_A \cos 60°$. Поэтому

$$v_C = v_A \cos 60° = \frac{v_A}{2} = 0{,}2 \text{ м/с}.$$



Проекция $\vec{v}_A$ на прямую AC (бирюзовая) равна $\vec{v}_C$ — длины стрелок соответствуют $v_A = 0{,}4$ м/с и $v_C = 0{,}2$ м/с.

2. Угловая скорость. Второй способ найти v_C и сразу ω — мгновенный центр вращения F: в данный момент все точки вращаются вокруг F, скорость точки равна ω, умноженной на расстояние до F, и перпендикулярна отрезку к F. Поэтому F лежит на перпендикулярах к скоростям. Из A это вертикаль (перпендикуляр к $\vec{v}_A \parallel BC$), из C — перпендикуляр к CA. Они пересекаются в точке F на оси симметрии под стороной BC.

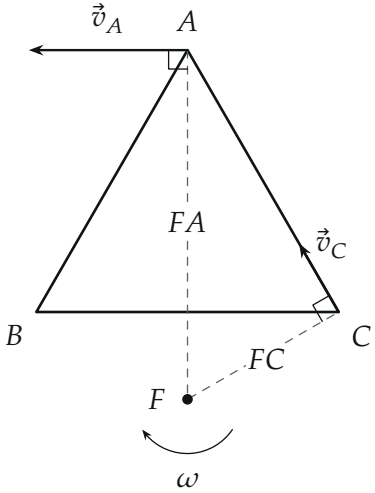
В треугольнике FAC угол при C прямой, угол при A равен 30° (ось симметрии делит угол 60° пополам), $AC = a$. Отсюда

$$FA = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \qquad FC = a \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Тогда $v_A = \omega FA$, $v_C = \omega FC$, и

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{FC}{FA} = \frac{1}{2}, \qquad \omega = \frac{v_A}{FA} = \frac{\sqrt{3}\, v_A}{2a} = \frac{\sqrt{3}\, v_C}{a} = \sqrt{3}\ \text{с}^{-1} \approx 1{,}73\ \text{с}^{-1}.$$

Отношение $1/2$ совпало с шагом 1.



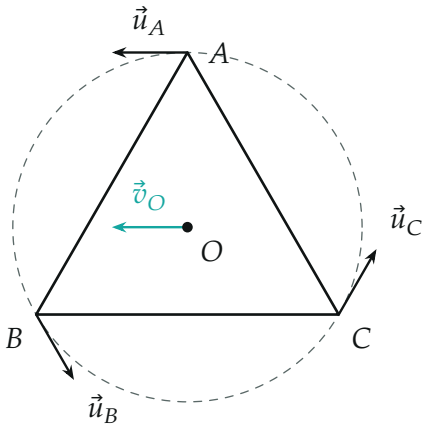
Мгновенный центр вращения F лежит на перпендикулярах к $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_C$; $FA = 2FC$, поэтому $v_A = 2v_C$.

Пункт 2.

3. Система центра масс. Стол гладкий: сила тяжести и реакция стола уравновешены, горизонтальных сил нет. По теореме о движении центра масс O движется равномерно, а момент внешних сил относительно O равен нулю, поэтому $\omega = \text{const}$. Система центра масс инерциальна, и поступательное движение системы отсчёта угловую скорость не меняет: пластина вращается вокруг неподвижной O с тем же $\omega = \sqrt{3}\ \text{с}^{-1}$.

4. Три оборота. Угол $3 \cdot 2\pi = 6\pi$ при постоянной ω набирается за время

$$\tau = \frac{6\pi}{\omega} = \frac{6\pi a}{\sqrt{3}\,v_C} = 2\sqrt{3}\,\pi\,\frac{a}{v_C} \approx 10{,}9 \text{ с}.$$



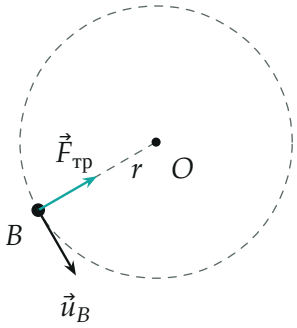
Система центра масс: все вершины идут по описанной окружности радиуса r против часовой стрелки со скоростью $u = \omega r$ (векторы $\vec{u}$ — касательные); бирюзовая стрелка — скорость $\vec{v}_O$ самого центра масс в системе стола.

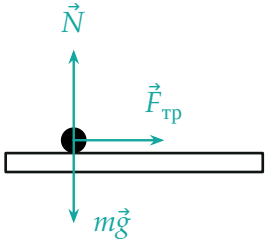
Пункт 3.

5. Ускорение пчелы. Пчела лёгкая и не меняет ни O, ни ω. Она неподвижна относительно пластины, поэтому в системе центра масс равномерно идёт по окружности радиуса $r = OB = a/\sqrt{3}$ с ускорением $\omega^2 r$ к O. Система центра масс движется без ускорения, поэтому в системе стола ускорение пчелы то же.

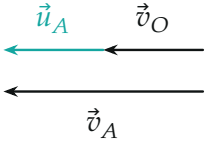
6. Равнодействующая. Второй закон Ньютона для пчелы: равнодействующая всех сил $R = m\omega^2 r$ и направлена к O. По вертикали $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ уравновешены, и R — это трение покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ со стороны пластины. Подставим $\omega^2 = 3v_C^2/a^2$, $r = a/\sqrt{3}$ и $m = 100$ мг$= 10^{-4}$ кг:

$$R = m\omega^2 r = m\cdot\frac{3v_C^2}{a^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,m\,\frac{v_C^2}{a} = \sqrt{3}\cdot 10^{-4}\cdot\frac{0{,}04}{0{,}2}\text{ Н} \approx 3{,}46\cdot 10^{-5}\text{ Н}.$$

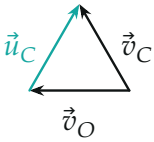




Пчела в системе центра масс (вид сверху): нужна сила к центру O, её даёт трение покоя. Вид сбоку: $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ уравновешены, остаётся $\vec{F}_{тр} = m\omega^2 r$.



в точке A



в точке C

Сложение $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{u}$ при $v_O = u = 0{,}2$ м/с: в точке A скорости складываются, в точке C образуют равносторонний треугольник.

Проверка. Размерность: mv_C^2/a — кг·м/с^2, ньютоны. Третий способ для скоростей: $v_O = \omega FO = \omega a/\sqrt{3} = 0{,}2$ м/с (влево), скорость вершины в системе центра масс $u = \omega r = 0{,}2$ м/с. Тогда $v_A = v_O + u = 0{,}4$ м/с, как в условии, а у вершины C векторы $\vec{v}_O$, $\vec{u}_C$ и $\vec{v}_C$ образуют равносторонний треугольник: $v_C = 0{,}2$ м/с вдоль CA. Смысл: пчела чувствует только вращение пластины; равномерное скольжение силы не требует.

Ответ. 1) $v_C = \dfrac{v_A}{2} = 0{,}2$ м/с; 2) $\tau = 2\sqrt{3}\,\pi\,\dfrac{a}{v_C} \approx 10{,}9$ с; 3) $R = \sqrt{3}\,m\dfrac{v_C^2}{a} \approx 3{,}46 \cdot 10^{-5}$ Н.