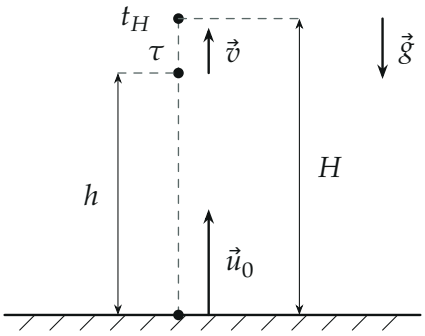
Взрыв фейерверка в верхней точке

Задача 2. [Физтех 2024/25, 10 класс, варианты 10-01–10-04, задача 2] Фейерверк установлен на горизонтальной площадке. После мгновенного сгорания топлива начинается полёт фейерверка по вертикали. В процессе подъёма на высоте $h = 8$ м фейерверк находился через $\tau = 0{,}8$ с после начала полёта.

1. На какую максимальную высоту H поднимается фейерверк? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.

На максимальной высоте фейерверк разрывается на два осколка одинаковой массы, один из которых летит со скоростью $V_0 = 20$ м/с. Направление вектора $\vec{V}_0$ скорости таково, что расстояние между осколками после падения на горизонтальную площадку максимальное.

2. Найдите максимальное расстояние L_{MAX} между осколками после падения осколков на горизонтальную площадку.



Поясняющий рисунок: площадка, высота h в момент τ, наибольшая высота H; $\vec{u}_0$ — начальная скорость.

▲ **Решение. Что происходит.** Фейерверк взлетает вертикально и тормозится силой тяжести: по h и τ находим начальную скорость, потом H. В верхней точке скорость нулевая, и за короткий взрыв импульс сохраняется: равные осколки разлетаются со скоростями $\vec{V}_0$ и $-\vec{V}_0$. Дальше это задача на экстремум: расстояние между точками падения записываем через одну переменную и ищем максимум двумя способами.

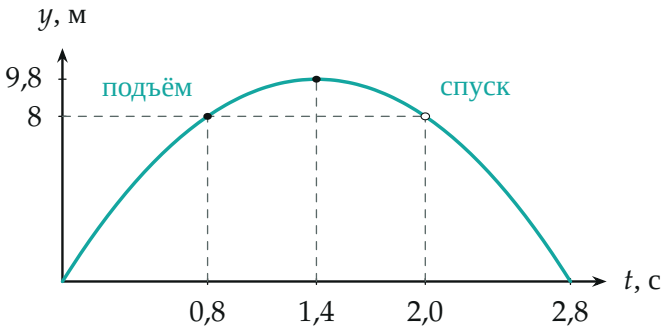
Обозначения. Ось y вверх, $y = 0$ — площадка; u_0 — начальная скорость. Для осколков: φ — угол $\vec{V}_0$ с горизонтом, V_{0x} и V_{0y} — проекции $\vec{V}_0$ на горизонтальную ось x и на y.

Пункт 1.

1. Начальная скорость. Ускорение постоянно, $a_y = -g$, поэтому $y = u_0 t - gt^2/2$. В момент $t = \tau$ высота равна h:

$$h = u_0\tau - \frac{g\tau^2}{2} \quad \Rightarrow \quad u_0 = \frac{h}{\tau} + \frac{g\tau}{2} = \frac{8}{0{,}8} + \frac{10 \cdot 0{,}8}{2} = 10 + 4 = 14 \text{ м/с}.$$

Обратите внимание: высота 8 м бывает дважды — на подъёме и на спуске (рисунок). Условие говорит о подъёме: при найденном u_0 скорость в момент τ равна $u_0 - g\tau = 6$ м/с > 0, фейерверк летит вверх; второй корень $t = 2$ с — спуск.



Высота фейерверка $y(t) = u_0 t - gt^2/2$: на подъёме высота 8 м достигается в момент 0,8 с, наибольшая высота 9,8 м — в момент 1,4 с, на спуске 8 м — снова в момент 2 с.

2. Наибольшая высота. В верхней точке скорость равна нулю. Из формулы $v^2 = u_0^2 - 2gy$ при $v = 0$:

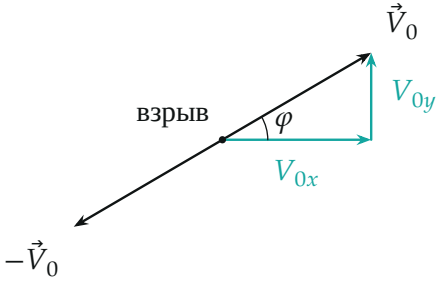
$$H = \frac{u_0^2}{2g} = \frac{14^2}{2 \cdot 10} = 9{,}8 \text{ м}.$$

Второй способ: от высоты h фейерверк летит вверх со скоростью $u_0 -$

$g\tau = 6$ м/с, поэтому $H = h + \dfrac{6^2}{2g} = 8 + 1{,}8 = 9{,}8$ м.

Пункт 2.

3. Скорости осколков сразу после взрыва. Закон сохранения импульса системы «два осколка» за время взрыва (импульс силы тяжести за короткий взрыв пренебрежимо мал, до взрыва скорость нулевая): $m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 = 0$. Масса одинакова, значит, $\vec{V}_2 = -\vec{V}_1$. Пусть первый осколок летит со скоростью $\vec{V}_0$ под углом φ к горизонту: $V_{0x} = V_0\cos\varphi$, $V_{0y} = V_0\sin\varphi$. Тогда у второго проекции равны $-V_{0x}$ и $-V_{0y}$.



Скорости осколков сразу после взрыва: равны по модулю, противоположны по направлению.

4. Движение каждого осколка. Осколок — тело, брошенное с высоты H с начальной скоростью $\vec{V}_0$; по горизонтали движение равномерное, по вертикали — с ускорением $-g$. Координаты осколков (начало — точка площадки под местом взрыва; верхний знак — первый осколок, нижний — второй):

$$x_{1,2} = \pm V_{0x}t, \qquad y_{1,2} = H \pm V_{0y}t - \frac{gt^2}{2}.$$

Пусть $V_{0y} \geq 0$: иначе просто поменяем имена осколков.

5. Время падения. На площадке $y = 0$. Из квадратного уравнения $y = 0$ берём положительный корень:

$$T_{1,2} = \frac{\pm V_{0y} + \sqrt{V_{0y}^2 + 2gH}}{g}.$$

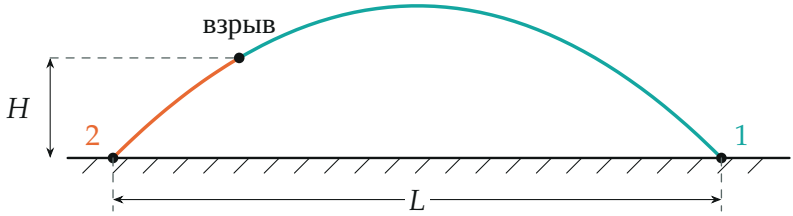
Сумма времён $T_1 + T_2 = \dfrac{2}{g}\sqrt{V_{0y}^2 + 2gH}$.

6. Расстояние между точками падения. Осколки падают по разные стороны: $x_1 = V_{0x}T_1 > 0$, $x_2 = -V_{0x}T_2 < 0$, поэтому

$$L = x_1 - x_2 = V_{0x}(T_1 + T_2) = \frac{2}{g}\sqrt{V_{0x}^2\,(V_{0y}^2 + 2gH)}.$$

Выразим $V_{0x}^2 = V_0^2 - V_{0y}^2$ и обозначим $u = V_{0y}^2$:

$$L = \frac{2}{g}\sqrt{(V_0^2 - u)(u + 2gH)}.$$



Траектории осколков при наибольшем расстоянии: первый (бирюзовый) уходит вправо, второй (морковный) — влево и вниз; L — расстояние между точками падения.

7. Максимум. Качественно: чем круче осколки разлетаются, тем дольше они летят, но тем меньше горизонтальная скорость; при $\varphi = 90°$ $L = 0$, значит, где-то между 0 и 90° есть максимум.

Подкоренное выражение — произведение двух множителей, сумма которых от u не зависит: $(V_0^2 - u) + (u + 2gH) = V_0^2 + 2gH = \text{const}$. Произведение двух чисел с постоянной суммой наибольшее, когда числа равны. Поэтому максимум достигается при

$$V_0^2 - u = u + 2gH, \qquad \text{откуда} \qquad V_{0y}^2 = u = \frac{V_0^2 - 2gH}{2} = 102\ \text{м}^2/\text{с}^2.$$

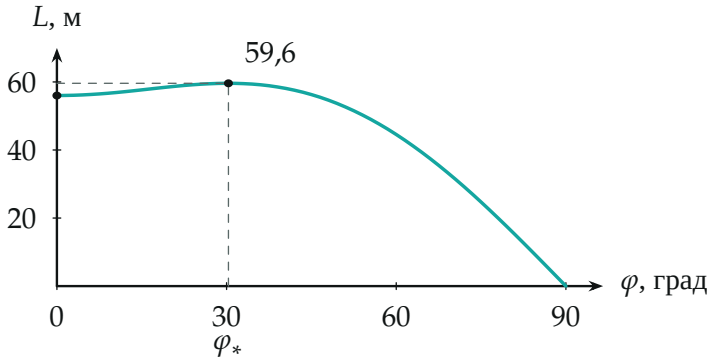
Второй способ: $(V_0^2 - u)(u + 2gH)$ — парабола по u ветвями вниз, вершина посередине между корнями V_0^2 и $-2gH$ — то же u. Здесь учтено,

что $V_0^2 > 2gH$ (400 > 196): иначе $u < 0$, и наибольшее L достигалось бы при $u = 0$, то есть при горизонтальном разлёте.

8. Подстановка. Каждый из равных множителей равен $(V_0^2 + 2gH)/2$:

$$L_{\text{MAX}} = \frac{2}{g} \cdot \frac{V_0^2 + 2gH}{2} = \frac{V_0^2}{g} + 2H = \frac{400}{10} + 2 \cdot 9{,}8 = 59{,}6 \text{ м}.$$

Угол: $\sin \varphi_* = V_{0y}/V_0 = \sqrt{102}/20 \approx 0{,}505$, $\varphi_* \approx 30°$.



Расстояние между точками падения в зависимости от угла φ: при горизонтальном разлёте 56 м, наибольшее значение 59,6 м — при $\varphi_* \approx 30°$, при вертикальном разлёте расстояние равно нулю.

Проверка. Размерность: V_0^2/g и H — метры. Предел $H \to 0$: $L_{\text{MAX}} = V_0^2/g$ — дальность броска под 45° с земли, второй осколок сразу на земле. Численный перебор угла даёт 59,6 м при $\varphi \approx 30{,}3°$. Обратите внимание: в условии максимум берётся по направлению $\vec{V}_0$, поэтому ответ 59,6 м (как у организаторов), а не $L(0) = \frac{2}{g} V_0 \sqrt{2gH} = 56$ м горизонтального разлёта. Смысл: наклон вверх выигрывает у первого осколка больше времени полёта, чем теряет второй.

Ответ. 1) $H = \frac{1}{2g}\left(\frac{h}{\tau} + \frac{g\tau}{2}\right)^2 = 9{,}8$ м; 2) $L_{\text{MAX}} = \frac{V_0^2}{g} + 2H = 59{,}6$ м.