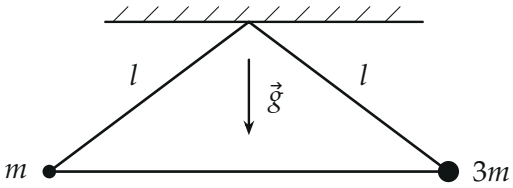
Шарики на нитях и стержне

Задача 3. [Физтех 2024/25, 10 класс, варианты 10-01–10-04, задача 3] Два шарика с массами $m = 0{,}1$ кг и $3m$ подвешены на невесомых нерастяжимых нитях длины l, прикреплённых к одной точке потолка. Шарики скреплены с лёгким стержнем длины $L = 1{,}6\,l$. Систему удерживают так, что шарики находятся на одной высоте. Далее систему освобождают.



1. Какой угол α с горизонтом образует вектор $\vec{a}_1$ ускорения шарика массой m сразу после освобождения системы? В ответе укажите $\sin\alpha$.
2. Найдите модуль a_1 ускорения шарика массой m сразу после освобождения системы. Начальная скорость нулевая. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.
3. Найдите модуль T упругой силы, с которой стержень действует на этот шарик сразу после освобождения системы.

▲ **Решение. Что происходит.** Шарики связаны нитями и жёстким стержнем и начинают двигаться из состояния покоя. Нити остаются натянутыми, поэтому каждый шарик движется по окружности вокруг точки подвеса. Скорость ещё нулевая, центростремительного ускорения нет, и ускорение каждого шарика направлено по касательной к его окружности, то есть перпендикулярно нити. Тяжёлый шарик тянет систему вниз, лёгкий поднимается. Главная идея: из-за жёсткого стержня модули ускорений равны, а проекции на касательные исключают неизвестные натяжения нитей. Это задача на связанные тела с неизвестной силой в стержне.

Обозначения. O — точка подвеса, шарик 1 — массой m (слева), шарик 2 — массой $3m$ (справа). β — угол нити с горизонтом, α — угол

ускорения с горизонтом, $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ — силы натяжения нитей, $\vec{T}$ — сила со стороны стержня, T — её модуль.

Пункт 1.

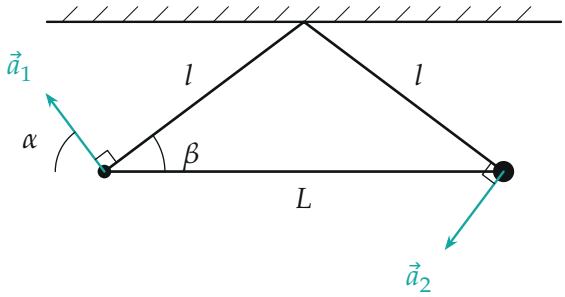
1. Геометрия. Нити одинаковы, стержень горизонтален, поэтому треугольник из нитей и стержня равнобедренный. Опустим высоту из точки O: она делит стержень пополам, и в прямоугольном треугольнике

$$\cos\beta = \frac{L/2}{l} = 0{,}8, \qquad \sin\beta = 0{,}6.$$

Ускорение $\vec{a}_1$ перпендикулярно нити, поэтому угол между $\vec{a}_1$ и горизонтом $\alpha = 90^\circ - \beta$ (две стороны углов взаимно перпендикулярны):

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{L}{2l} = 0{,}8, \qquad \cos\alpha = 0{,}6, \qquad \alpha \approx 53^\circ.$$

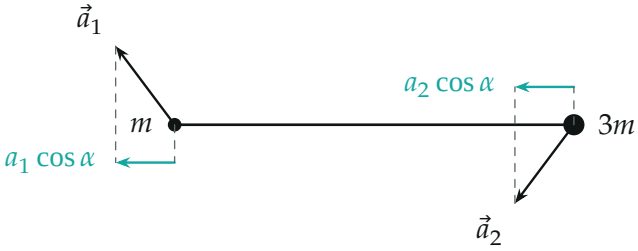
Лёгкий шарик движется вверх и влево, тяжёлый — вниз и влево (рисунок): стержень горизонтален, его длина не меняется, и горизонтальные смещения шариков одинаковы по направлению.



Ускорения шариков перпендикулярны нитям. Угол α между $\vec{a}_1$ и горизонтом равен $90^\circ - \beta$, поэтому $\sin\alpha = \cos\beta = L/(2l)$.

Пункт 2.

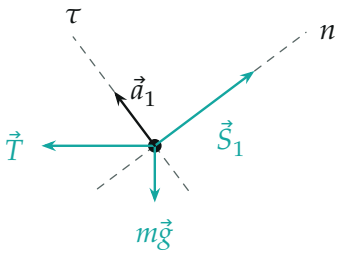
2. Модули ускорений равны. Стержень твёрдый, расстояние между шариками не меняется. Значит, за малое время оба шарика смещаются вдоль стержня на одно и то же расстояние, и проекции ускорений на горизонталь равны: $a_1 \cos\alpha = a_2 \cos\alpha$. Отсюда $a_1 = a_2 = a$.



Проекции ускорений на стержень равны, потому что стержень не растягивается; углы наклона $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ к горизонту одинаковы, отсюда $a_1 = a_2$.

3. Силы и оси. На каждый шарик действуют сила тяжести, натяжение нити вдоль нити и сила стержня вдоль стержня (стержень лёгкий и к нему приложены только две силы, по одной в концах: для равновесия невесомого стержня они равны по модулю и направлены вдоль него, поэтому модули сил на шарики одинаковы и равны T). Стержень сжат: если бы его не было, шарики сразу сближались бы, поэтому он их расталкивает — лёгкий шарик толкает влево, тяжёлый вправо. Это предположение проверим по знаку T.

Ось τ направим вдоль ускорения шарика, по касательной к окружности: на неё натяжение нити, перпендикулярное ей, проекции не даёт — неизвестные S_1 и S_2 выпадают.



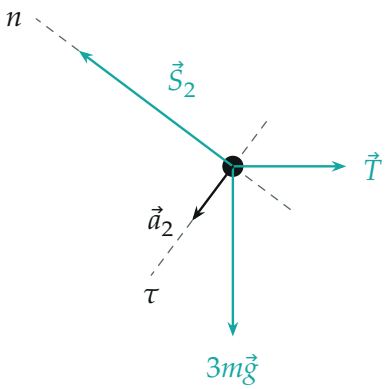
Шарик m: оси τ (вдоль ускорения) и n (вдоль нити к точке O). Длины стрелок сил — в масштабе, $mg = 1$ Н.

4. Второй закон Ньютона в проекции на τ. Шарик 1 (проекция $\vec{T}$ на τ равна $T\cos\alpha$, проекция $m\vec{g}$ равна $-mg\sin\alpha$):

$$ma = T\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

Шарик 2 (ось τ направлена вниз-влево: проекция $\vec{T}$ равна $-T\cos\alpha$, проекция $3m\vec{g}$ равна $+3mg\sin\alpha$):

$$3ma = 3mg\sin\alpha - T\cos\alpha.$$



Шарик $3m$: оси и силы в том же масштабе ($3mg = 3$ Н).

5. Ускорение. Сложим уравнения — T сокращается:

$$4ma = 2mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g\sin\alpha}{2} = \frac{10\cdot 0{,}8}{2} = 4\ \text{м/с}^2.$$

Пункт 3.

6. Сила стержня. Из первого уравнения $T\cos\alpha = m(a + g\sin\alpha) = \frac{3}{2}mg\sin\alpha$, то есть

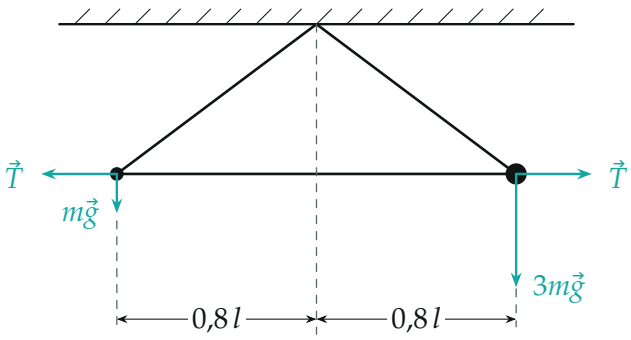
$$T = \frac{3}{2}mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{2}\cdot 0{,}1\cdot 10\cdot\frac{4}{3} = 2\ \text{Н}.$$

$T > 0$ — стержень действительно сжат. Обратите внимание: нити при этом натянуты: из проекций на n получаем $S_1 = mg\sin\beta + T\cos\beta = 2{,}2\ \text{Н} > 0$ и $S_2 = 3mg\sin\beta + T\cos\beta = 3{,}4\ \text{Н} > 0$, то есть предположение о натянутых нитях верно.

7. Второй способ для a — моменты сил относительно O. Оба шарика идут по окружностям радиуса l с одним ускорением a, поэтому уг-

ловое ускорение $\varepsilon = a/l$ у обоих одинаково. Нити проходят через O и момента не дают; силы $\vec{T}$ равны, противоположны и лежат на одной прямой — сумма их моментов нулевая. Остаётся момент сил тяжести с плечом $0{,}8\,l$:

$$(3m - m)\,g \cdot 0{,}8\,l = (ml^2 + 3ml^2)\,\varepsilon \quad \Rightarrow \quad a = \varepsilon l = 0{,}4\,g = 4\ \text{м/с}^2.$$



Моменты сил относительно O: плечо силы тяжести — $0{,}8\,l$ у обоих шариков, силы $\vec{T}$ дают нулевую сумму моментов.

Проверка. Размерность: $mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$ — ньютоны. Предел $L \to 0$ (шарики рядом): $\sin\alpha \to 0$, $a \to 0$ и $T \to 0$ — шарики висят в положении равновесия по вертикали. Предел одинаковых масс: $3m \to m$ — система в равновесии и $a = 0$ (в уравнении сложения вместо $2mg\sin\alpha$ получится 0). Оба способа дали $a = 4$ м/с^2; расчёт всех сил из полной системы уравнений (python) даёт $a = 4$ м/с^2, $T = 2$ Н, $S_1 = 2{,}2$ Н, $S_2 = 3{,}4$ Н. Смысл: тяжёлый шарик «тащит» лёгкий через стержень; ускорение равно половине $g\sin\alpha$, и стержень при этом сжат.

Ответ. 1) $\sin\alpha = \dfrac{L}{2l} = 0{,}8$; 2) $a_1 = \dfrac{g\sin\alpha}{2} = 4$ м/с^2; 3) $T = \dfrac{3}{2}\,mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ Н.