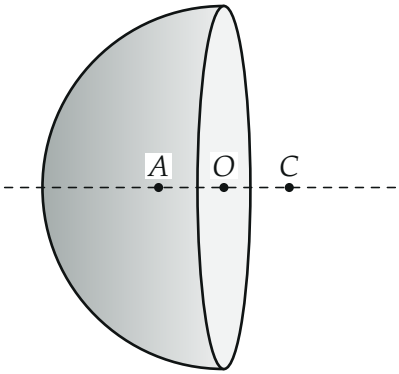
Частица в поле заряженной полусферы

Задача 5. [Физтех 2024/25, 10 класс, варианты 10-01–10-04, задача 5] По поверхности закреплённой диэлектрической полусферы однородно распределён заряд Q. Точки A, O, C находятся на оси симметрии (см. рис.). Точка O удалена от всех точек полусферы на расстояние R. Из точки A стартовала с нулевой начальной скоростью частица, масса которой m, заряд q. В точке O частица движется со скоростью V_O.

1. С какой скоростью V частица движется на большом по сравнению с R расстоянии от точки O? Коэффициент пропорциональности в законе Кулона k. Действие на частицу всех сил кроме кулоновских пренебрежимо мало.
2. Найдите скорость V_C, с которой частица движется в точке C. Точки A и C находятся на неизвестных равных расстояниях от точки O.

Эффекты, связанные с поляризацией диэлектрика, считайте пренебрежимо малыми. Скорость частицы в любой точке траектории мала по сравнению со скоростью электромагнитных волн в вакууме.



▲ **Решение. Что происходит.** Кулоновские силы консервативны, а других сил нет, поэтому работа поля равна изменению кинетической энергии: $\Delta K = -q\,\Delta\varphi$. В O потенциал считается сразу (все заряды на расстоянии R), а для A и C поможет симметрия: достроим полусферу до

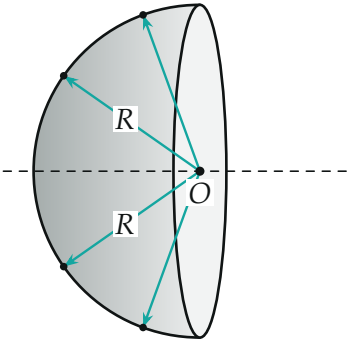
сферы, внутри которой поля нет. Класс задачи: потенциал и энергия в поле заряженного тела, симметрия.

Обозначения. φ — потенциал поля полусферы (на бесконечности $\varphi(\infty) = 0$), K — кинетическая энергия частицы, $d = OA = OC$ — расстояние от O до A и C ($d < R$, точки внутри шара, как на рисунке). Ось x направим по оси симметрии, начало в O, от полусферы.

Пункт 1.

1. Потенциал в точке O**.** Каждая малая часть заряда ΔQ_i удалена от O на R; потенциалы — скаляры и складываются:

$$\varphi_O = \sum_i \frac{k\,\Delta Q_i}{R} = \frac{kQ}{R}.$$



Все элементы заряда лежат на расстоянии R от точки O.

2. Закон сохранения энергии для частицы на пути от O до далёкой точки (поле консервативно, других сил нет, скорость мала по сравнению со скоростью света). Потенциальная энергия заряда q в поле равна $q\varphi$, на большом расстоянии $\varphi \to 0$:

$$\frac{mV_O^2}{2} + q\varphi_O = \frac{mV^2}{2} + 0 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{V_O^2 + \frac{2kqQ}{mR}}.$$

Формула верна для любых знаков q и Q: слагаемое kqQ/R несёт знак.

Пункт 2.

3. Достроим сферу. Мысленно добавим вторую полусферу — зеркальное отражение первой в плоскости основания (плоскость через O перпендикулярно оси), с таким же поверхностным зарядом, то есть с зарядом Q. Две полусферы вместе — равномерно заряженная сфера радиуса R. Внутри такой сферы поле равно нулю, поэтому в любой точке оси внутри шара поля двух полусфер равны по модулю и противоположны:

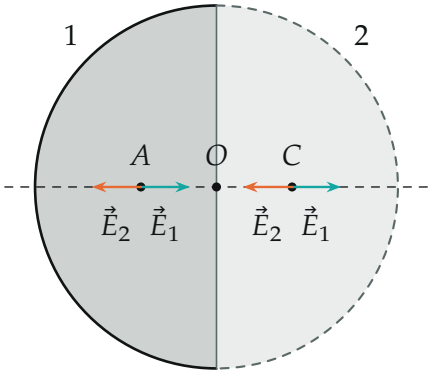
$$E_{1x} + E_{2x} = 0.$$

Здесь E_{1x} — проекция на ось x поля исходной полусферы, E_{2x} — зеркальной.

4. Связь точек A и C. При отражении в плоскости основания точка A переходит в C, а проекция вектора на ось x меняет знак. Поле зеркальной полусферы в точке A — отражение поля исходной в точке C: $E_{2x}(A) = -E_{1x}(C)$. Из равенства нулю суммы в точке A следует

$$E_{1x}(A) = E_{1x}(C).$$

Значит, $E_{1x}(x)$ — чётная функция внутри шара.

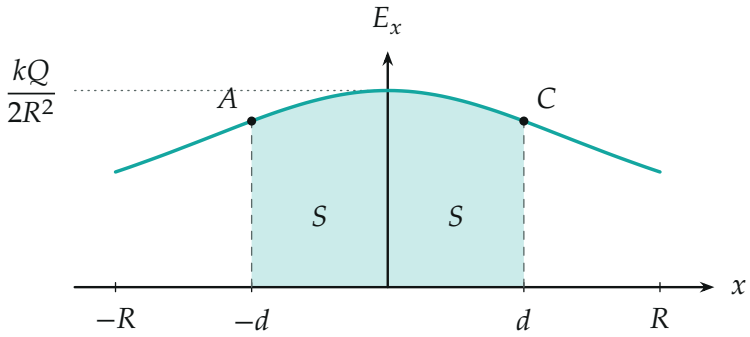


Полусфера 1 и зеркальная 2 (пунктир), $Q > 0$. В каждой точке $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$, а $\vec{E}_2$ в A — отражение $\vec{E}_1$ в C.

5. Равные изменения потенциала. Работа поля на перемещении единичного заряда равна $\int E_x\,dx$, то есть площади под графиком $E_x(x)$. Для

чётной функции площади на отрезках $[-d;0]$ и $[0;d]$ равны:

$$\varphi_A - \varphi_O = \varphi_O - \varphi_C.$$



Проекция поля полусферы на ось (в единицах kQ/R^2), расчёт — в проверке. Точки A и C на одинаковой высоте, закрашенные площади S равны.

6. Энергия. На участке $A \to O$ частица стартует из покоя:

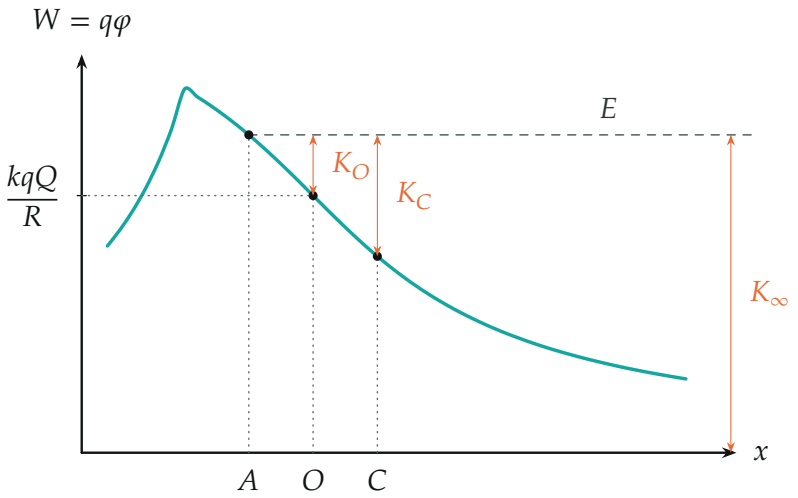
$$q(\varphi_A - \varphi_O) = \frac{mV_O^2}{2}.$$

На участке $O \to C$ по теореме об изменении кинетической энергии и с учётом равенства из пункта 5:

$$\frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_O^2}{2} = q(\varphi_O - \varphi_C) = q(\varphi_A - \varphi_O) = \frac{mV_O^2}{2}.$$

Отсюда $V_C^2 = 2V_O^2$, то есть

$$V_C = \sqrt{2}\,V_O.$$



Потенциальная энергия $W = q\varphi$ вдоль оси (для $qQ > 0$) и полная энергия $E = W(A)$. Разность $E - W$ — кинетическая энергия: в C она ровно вдвое больше, чем в O; вдали, где $W \to 0$, она равна E.

Обратите внимание: 1) потенциал в O находят сложением скаляров, хотя поле в O не нулевое ($E_O = kQ/(2R^2)$ — нуль только у целой сферы); 2) результат $V_C = \sqrt{2}V_O$ не зависит от d, q, m и знаков зарядов — нужны лишь равные расстояния $OA = OC < R$.

Проверка. Прямой расчёт суммированием по кольцам полусферы для точки оси x, $|x| < R$:

$$\varphi(x) = \frac{kQ}{R}\cdot\frac{R + x - \sqrt{R^2 + x^2}}{x}, \qquad E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{kQ}{R^2}\cdot\frac{1 - R/\sqrt{R^2 + x^2}}{x^2/R^2}.$$

Выражение для E_x чётно по x, а сумма $\varphi(x) + \varphi(-x) = 2kQ/R = 2\varphi_O$ — ровно то, что даёт симметрия: $\varphi_A + \varphi_C = 2\varphi_O$. При $x \to 0$ получаем $\varphi \to kQ/R$ и $E_x \to kQ/(2R^2)$, как в первом пункте.

Смысл: поле полусферы на оси одинаково в симметричных точках, поэтому шаги $A \to O$ и $O \to C$ дают одинаковую прибавку кинетической энергии.

Ответ. 1) $V = \sqrt{V_O^2 + \dfrac{2kqQ}{mR}}$; 2) $V_C = \sqrt{2}\,V_O$.