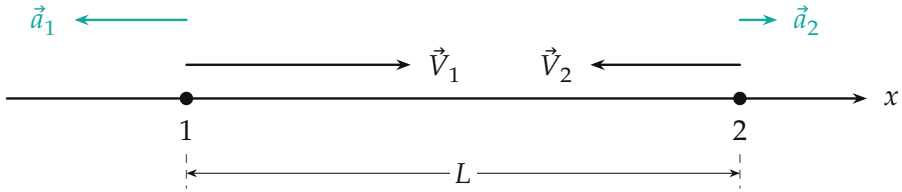
Две точки навстречу друг другу

Задача 1. [Физтех 2024/25, 10 класс, варианты 10-05–10-06, задача 1] Две материальные точки движутся по одной прямой навстречу друг другу. В момент времени $t = 0$ скорости материальных точек $V_1 = 12$ м/с и $V_2 = 8$ м/с. В процессе сближения ускорения материальных точек $a_1 = 1{,}5$ м/с^2 и $a_2 = 0{,}5$ м/с^2 постоянны и направлены противоположно соответствующим начальным скоростям.



Поясняющий рисунок: скорости (чёрные) и ускорения (бирюзовые) в момент $t = 0$; L — начальное расстояние между точками.

1. При каком наименьшем начальном расстоянии L между точками не произойдёт столкновение точек в процессе движения?
2. Найдите показание T часов в тот момент, когда расстояние между точками будет наименьшим, если при $t = 0$ расстояние между точками было равно L.
3. Найдите длину S_1 пути, пройденного первой материальной точкой к моменту времени T, когда расстояние между точками будет наименьшим.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на относительное движение при постоянных ускорениях. Точки летят навстречу и обе тормозятся; сначала они сближаются, потом скорости сравниваются, и точки начинают расходиться — в этот момент расстояние наименьшее. Главная идея: перейти в систему отсчёта первой точки. В ней вторая налетает со скоростью $V_1 + V_2$ и тормозится ускорением $a_1 + a_2$, и задача сводится к торможению одной точки.

Обозначения. Ось x направим вдоль начальной скорости первой точки, от первой ко второй: тогда все проекции начальных данных видны

сразу. Начало отсчёта — первая точка при $t = 0$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = L$. Проекции: $v_{1x}(0) = V_1$, $v_{2x}(0) = -V_2$, $a_{1x} = -a_1$ (против скорости), $a_{2x} = +a_2$. Расстояние между точками $\xi(t) = x_2 - x_1$.

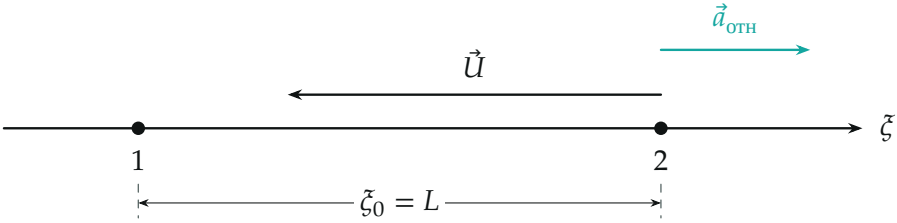
1. Движение точек и расстояние между ними. Ускорения постоянны, поэтому для каждой точки верны формулы равноускоренного движения:

$$x_1 = V_1 t - \frac{a_1 t^2}{2}, \qquad x_2 = L - V_2 t + \frac{a_2 t^2}{2}.$$

Вычитаем:

$$\xi(t) = x_2 - x_1 = L - (V_1 + V_2)\, t + \frac{(a_1 + a_2)\, t^2}{2} = L - Ut + \frac{at^2}{2},$$

где $U = V_1 + V_2 = 20$ м/с, $a = a_1 + a_2 = 2$ м/с^2. Так движется точка, которая стартует со скоростью U к первой точке и тормозится ускорением a.

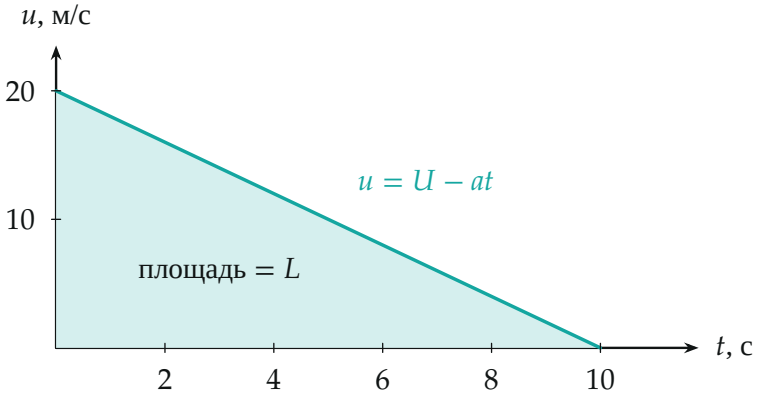


Система отсчёта первой точки: вторая точка приближается со скоростью $U = V_1 + V_2$ и тормозится ускорением $a_{отн} = a_1 + a_2$ против скорости.

Пункт 1.

2. Качественная картина. Скорость сближения $u = U - at$ убывает: пока $u > 0$, расстояние уменьшается, после $u = 0$ точки расходятся. Значит, расстояние минимально при $u = 0$:

$$t = T = \frac{U}{a}.$$



Относительная скорость $u(t)$. Площадь треугольника под графиком — расстояние, на которое сближаются точки за время T.

3. Минимальное расстояние. Сближение за время T — площадь треугольника под графиком $u(t)$: $\frac{1}{2}UT = \dfrac{U^2}{2a}$. То же из формулы для ξ при $t = T$:

$$\xi_{\min} = L - UT + \frac{aT^2}{2} = L - \frac{U^2}{2a}.$$

Столкновения нет, пока $\xi_{\min} \geq 0$:

$$L \geq \frac{U^2}{2a} = \frac{(V_1 + V_2)^2}{2(a_1 + a_2)} = \frac{20^2}{2 \cdot 2}\ \text{м} = 100\ \text{м}.$$

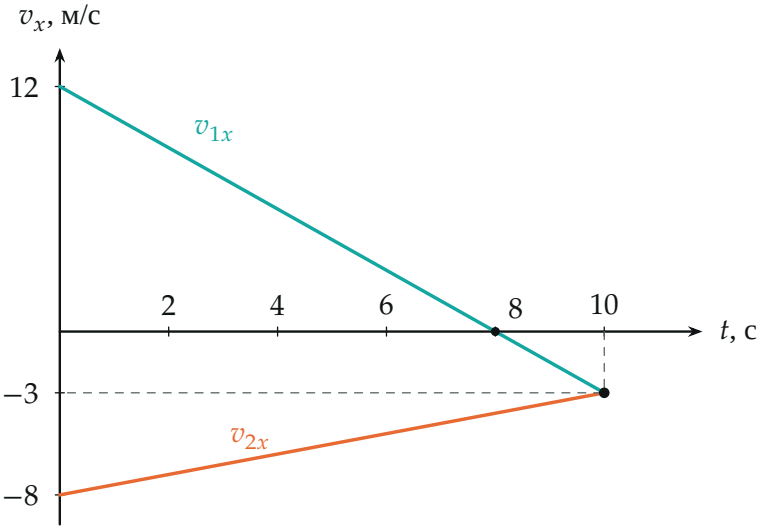
При $L = 100$ м точки в момент T оказываются в одном месте с одинаковой скоростью: графики $x_1(t)$ и $x_2(t)$ касаются, но не пересекаются.

Пункт 2.

4. Время. Слагаемое L только сдвигает параболу $\xi(t)$ вверх или вниз, положение минимума не меняется. Поэтому при любом L

$$T = \frac{V_1 + V_2}{a_1 + a_2} = \frac{20}{2}\ \text{с} = 10\ \text{с}.$$

К этому моменту скорости равны: $v_{1x}(T) = 12 - 1{,}5 \cdot 10 = -3$ м/с, $v_{2x}(T) = -8 + 0{,}5 \cdot 10 = -3$ м/с — обе точки идут влево со скоростью 3 м/с.



Проекции скоростей на ось x. К моменту $T = 10$ с они сравниваются на значении -3 м/с. Первая точка меняет направление в момент 8 с.

Пункт 3.

5. Путь, а не перемещение. Первая точка тормозится: $v_{1x} = V_1 - a_1 t$ обращается в нуль при

$$t_1 = \frac{V_1}{a_1} = 8 \text{ с},$$

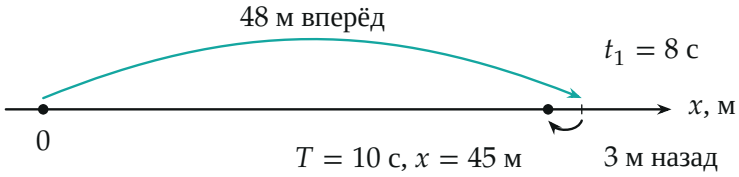
а затем едет назад: ускорение прежнее. Путь складывается из пути вперёд до остановки и пути назад за оставшиеся $T - t_1 = 2$ с. Вперёд:

$$s_{\text{вп}} = \frac{V_1 t_1}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48 \text{ м}.$$

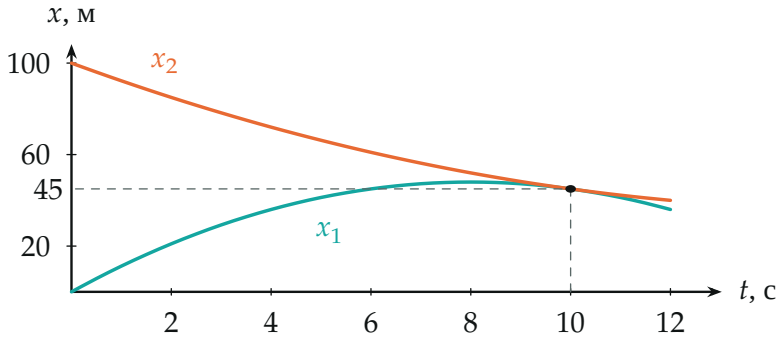
Назад (точка стартует из покоя с ускорением a_1):

$$s_{\text{назад}} = \frac{a_1 (T - t_1)^2}{2} = \frac{1{,}5 \cdot 2^2}{2} = 3 \text{ м}.$$

Путь: $S_1 = s_{\text{вп}} + s_{\text{назад}} = 48 + 3 = 51$ м. Обратите внимание: перемещение первой точки за это время $x_1(T) = 12 \cdot 10 - 1{,}5 \cdot 100/2 = 45$ м, а путь — 51 м: на повороте точка проходит 3 м дважды в разные стороны.



Путь первой точки: 48 м вперёд до остановки в момент 8 с и 3 м назад до момента T.



Координаты точек при $L = 100$ м. К моменту $T = 10$ с обе оказываются в точке $x = 45$ м и касаются; после этого расходятся.

Проверка. Размерность: $U^2/(2a)$ — (м/с)^2 на м/с^2, то есть метры. Второй способ для S_1: путь — это площадь под графиком $|v_{1x}|$: $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 48 + 3 = 51$ м, как и выше. Второй способ для L: обе точки при $L = 100$ м в момент T в точке 45 м (рисунок): $x_1(T) = 45$, $x_2(T) = 100 - 80 + 25 = 45$. Предел $a \to \infty$: $L \to 0$ — точки мгновенно остановились бы. Смысл: наименьшее допустимое расстояние равно тормозному пути «налетающей» точки в системе отсчёта первой.

Ответ. 1) $L = \dfrac{(V_1 + V_2)^2}{2(a_1 + a_2)} = 100$ м; 2) $T = \dfrac{V_1 + V_2}{a_1 + a_2} = 10$ с; 3) $S_1 = \dfrac{V_1^2}{2a_1} + \dfrac{a_1(T - V_1/a_1)^2}{2} = 51$ м.