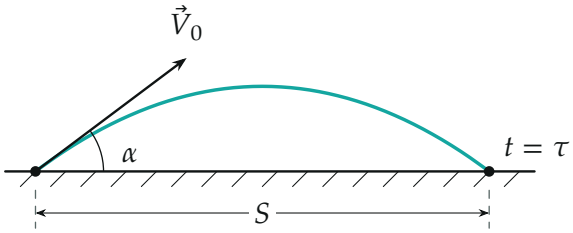
# Мяч против ветра с линейным сопротивлением

**Задача 2.** [Физтех 2024/25, 10 класс, варианты 10-05–10-06, задача 2] Футболист наносит удар по мячу, лежащему на горизонтальной площадке. Через $\tau = 3$ с мяч падает на площадку на расстоянии $S = 60$ м от точки старта.

1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, здесь $\alpha$ — угол, который вектор начальной скорости мяча образует с горизонтом.
2. Найдите модуль $V_0$ начальной скорости мяча. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.




*Поясняющий рисунок: полёт мяча без сопротивления.*

Футболист наносит удар по мячу и сообщает ему начальную скорость $V_0$, направленную под углом $\alpha$ к горизонту ($V_0$ и $\alpha$ найдены Вами при ответах на вопросы 1 и 2). Мяч летит навстречу ветру, дующему вдоль поверхности земли с постоянной горизонтальной скоростью. Через некоторое время мяч возвращается в точку старта со скоростью $0{,}6\,V_0$.

3. Найдите продолжительность $T$ такого полёта. Силу сопротивления, с которой воздушный поток действует на мяч, считайте пропорциональной относительной скорости $\vec{F}_{\text{СОПР}} = -k\vec{V}_{\text{ОТН}}$, здесь $k$ — коэффициент пропорциональности, постоянная величина, $\vec{V}_{\text{ОТН}}$ — скорость мяча относительно воздушного потока.

▲ **Решение. Что происходит.** Без воздуха мяч — тело, брошенное под углом: по горизонтали равномерно, по вертикали с ускорением $g$; время полёта и дальность дают проекции начальной скорости. С ветром на мяч действует ещё сила, пропорциональная скорости относительно воздуха.

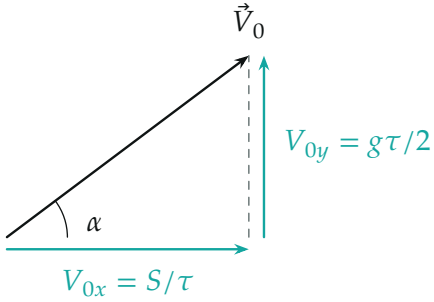
Главная идея — записать второй закон Ньютона так, чтобы сила тяжести и сила от ветра слились в одну постоянную силу $\vec{F}$, а добавка $-k\vec{V}$ осталась пропорциональной скорости в системе земли. Мяч вернулся в точку старта: сложим уравнение по малым промежуткам — слагаемое с перемещением обнулится, и время полёта найдётся, не зная $k$ и скорости ветра.

**Обозначения.** Ось $x$ — по горизонтали в сторону удара, ось $y$ — вверх. $\vec{V}$ — скорость мяча относительно земли, $\vec{U}$ — скорость воздуха (ветра) относительно земли, $\vec{V}_{\text{ОТН}} = \vec{V} - \vec{U}$.

**Пункт 1.**

**1. Проекции начальной скорости.** Без сопротивления по горизонтали скорость постоянна: $V_{0x} = S/\tau = 20$ м/с. По вертикали мяч летит с ускорением $-g$ и возвращается на ту же высоту, поэтому подъём и спуск длятся поровну и скорость на спуске равна начальной по модулю и противоположна по знаку: $V_{0y} - g\tau = -V_{0y}$, откуда $V_{0y} = g\tau/2 = 15$ м/с. Тангенс угла

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} = \frac{g\tau^2}{2S} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 60} = 0{,}75, \qquad \sin\alpha = 0{,}6,\ \cos\alpha = 0{,}8.$$




*Начальная скорость и её проекции: $V_{0x} = 20$ м/с, $V_{0y} = 15$ м/с — прямоугольный треугольник $3:4:5$.*

**Пункт 2.**

**2. Модуль скорости.** $V_0 = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2} = \sqrt{400 + 225} = 25$ м/с.

**Пункт 3.**

**3. Уравнение движения в ветре.** Второй закон Ньютона для мяча за малое время $\Delta t$:

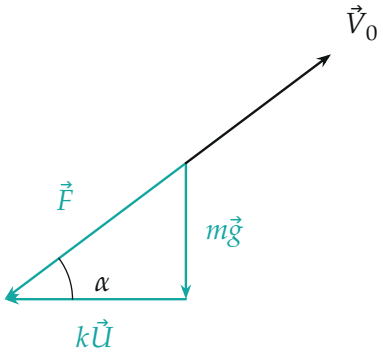
$$m\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = m\vec{g} - k(\vec{V} - \vec{U}) = \vec{F} - k\vec{V}, \qquad \vec{F} = m\vec{g} + k\vec{U}.$$

Сила $\vec{F}$ постоянна; остаётся «сопротивление» $-k\vec{V}$ в системе земли.

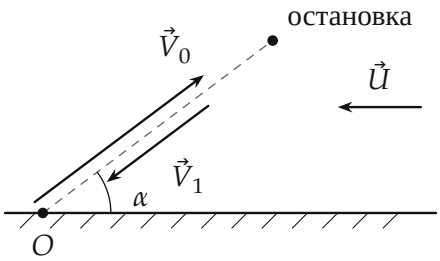
**4. Направление $\vec{F}$.** Разложим скорость на составляющую вдоль $\vec{F}$ и перпендикулярную ей. Перпендикулярная часть подчиняется уравнению $m\,\Delta V_\perp/\Delta t = -kV_\perp$: она только затухает, не меняя знака, и мяч смещается поперёк $\vec{F}$ всё время в одну сторону. Вернуться он может, только если $V_\perp = 0$ с самого начала: $\vec{V}_0 \parallel \vec{F}$, мяч летит по прямой. И $\vec{F}$ направлена против $\vec{V}_0$, иначе мяч не развернулся бы. Вертикальная составляющая $\vec{F}$ — это $m\vec{g}$ (ветер горизонтален), и она направлена вниз:

$$F\sin\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg}{\sin\alpha}.$$

Горизонтальная составляющая $k\vec{U}$ направлена против удара: ветер дует мячу навстречу, как и сказано в условии.




*Постоянная сила $\vec{F} = m\vec{g} + k\vec{U}$ направлена против начальной скорости $\vec{V}_0$: $F\sin\alpha = mg$.*




*Мяч летит по прямой вдоль $\vec{V}_0$, останавливается и по той же прямой возвращается в точку удара со скоростью $\vec{V}_1$, $V_1 = 0{,}6V_0$.*

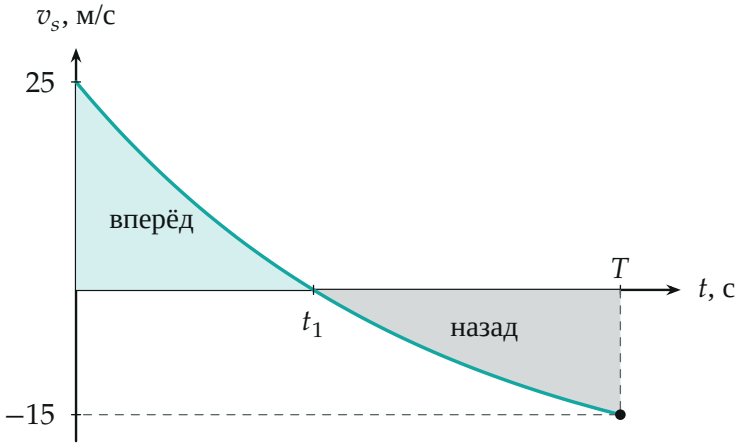
**5. Суммирование по времени.** Сложим уравнение $m\Delta\vec{V} = (\vec{F} - k\vec{V})\Delta t$ по всем малым промежуткам от удара до возвращения (время $T$):

$$m(\vec{V}_1 - \vec{V}_0) = \vec{F}\,T - k\sum \vec{V}\,\Delta t.$$

Сумма $\sum \vec{V}\,\Delta t$ — перемещение мяча за всё время, а мяч вернулся в точку старта, поэтому она равна нулю. Спроецируем на направление $\vec{V}_0$. Скорость в конце — вдоль той же прямой в обратную сторону, $V_1 = 0{,}6V_0$, её проекция $-V_1$; проекция $\vec{F}$ равна $-F$:

$$-mV_1 - mV_0 = -\frac{mg}{\sin\alpha}\,T \quad\Rightarrow\quad T = \frac{(V_0 + V_1)\sin\alpha}{g} = 1{,}6\,\frac{V_0\sin\alpha}{g},$$

$$T = \frac{1{,}6 \cdot 25 \cdot 0{,}6}{10}\ \text{с} = 2{,}4\ \text{с}.$$




*Проекция скорости на направление удара: площадь «вперёд» равна площади «назад» (перемещение за время $T$ равно нулю).*

**Проверка.** Размерность: $V\sin\alpha/g$ — секунды. Согласованность: решим уравнение движения вдоль прямой явно, $v(t) = -\dfrac{g}{b\sin\alpha} + \left(V_0 + \dfrac{g}{b\sin\alpha}\right)e^{-bt}$, $b = k/m$. Условия «вернулся в точку старта» и «скорость $0{,}6V_0$» одновременно выполняются при $b \approx 0{,}65\ \text{с}^{-1}$, и тогда $T = 2{,}40$ с — как из суммирования, а скорость ветра $U \approx -20{,}5$ м/с (против удара). Предел без сопротивления и ветра ($k \to 0$, $\vec{F} = m\vec{g}$) вернуть мяч в точку старта по той же прямой нельзя, поэтому сильный встречный ветер необходим. Смысл: при встречном ветре равнодействующая постоянной части $\vec{F}$ строго против начальной скорости, мяч идёт вперёд, тормозится, разворачивается и возвращается по той же прямой; расчёт времени не требует знать ни $k$, ни $U$.

**Ответ.** 1) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{g\tau^2}{2S} = 0{,}75$; 2) $V_0 = 25$ м/с; 3) $T = 1{,}6\,\dfrac{V_0\sin\alpha}{g} = 2{,}4$ с.