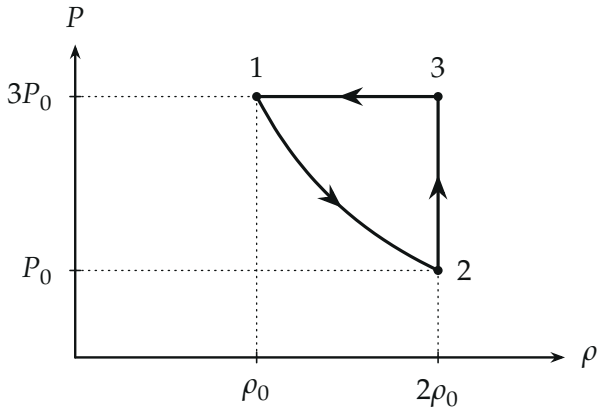
Цикл в координатах давление-плотность

Задача 4. [Физтех 2024/25, 10 класс, варианты 10-05–10-06, задача 4] Циклический процесс, проводимый с одноатомным идеальным газом, представлен на графике в координатах (P, ρ), здесь P — давление, ρ — плотность газа. Количество вещества — один моль. В процессе 1-2 давление газа изменяется по закону $P = a + \dfrac{b}{\rho}$, здесь a и b — постоянные. Максимальная внутренняя энергия газа в процессе $U_{\max} = 4986$ Дж.

1. Постройте график процесса в координатах (P, V). В состоянии 1 объём газа V_0, давление газа $3P_0$.
2. Найдите работу A газа за цикл.
3. Какое количество теплоты $|\Delta Q|$ будет отведено от газа в начале процесса сжатия при уменьшении температуры на $|\Delta T| = 1$ К? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).



▲ **Решение.** **Что происходит.** Масса газа не меняется, поэтому плотность $\rho = m/V$ обратно пропорциональна объёму: график (P, ρ) можно перевести в (P, V). Работа — площадь цикла в (P, V), а $U = \frac{3}{2}PV$ связывает P_0V_0 с заданным $U_{\max}$; теплоту в начале сжатия даёт первое начало на малом шаге. Класс задачи: цикл в нестандартных координатах.

Обозначения. $\nu = 1$ моль, V — объём газа, T — температура. Для малого шага: $\delta Q = dU + P\,dV$, $dU = \frac{3}{2}R\,dT$, и из уравнения состояния $PV = RT$ следует $P\,dV + V\,dP = R\,dT$.

Пункт 1.

1. От плотности к объёму. Из $\rho = m/V$: состояние 1 (ρ_0) — объём V_0, состояние 2 ($2\rho_0$) — объём $V_0/2$. Давления: $P_1 = 3P_0$, $P_2 = P_0$. Состояние 3 имеет ту же плотность, что и 2, то есть объём $V_0/2$, и давление $3P_0$.

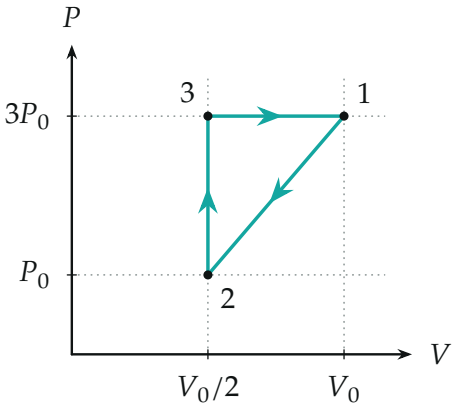
2. Закон процесса 1–2. Подставим две точки в $P = a + b/\rho$:

$$3P_0 = a + \frac{b}{\rho_0}, \qquad P_0 = a + \frac{b}{2\rho_0}.$$

Вычтем второе из первого: $\dfrac{b}{2\rho_0} = 2P_0$, откуда $b = 4P_0\rho_0$ и $a = -P_0$. Так как $1/\rho = V/m$, а $m = \rho_0 V_0$, получаем $b/\rho = 4P_0 V/V_0$ и

$$P = P_0\Big(4\frac{V}{V_0} - 1\Big).$$

Это прямая в координатах (V, P): проходит через точки $(V_0;\, 3P_0)$ и $(V_0/2;\, P_0)$. Участок 2–3 — вертикаль $V = V_0/2$, участок 3–1 — горизонталь $P = 3P_0$.

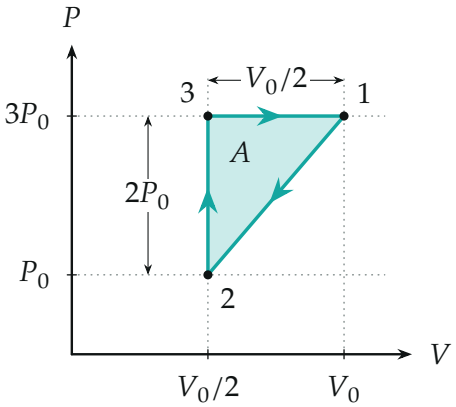


Цикл в координатах (V, P): $1 \to 2$ *— прямая* $P = P_0(4V/V_0 - 1)$, $2 \to 3$ *— изохора,* $3 \to 1$ *— изобара.* Обход $1 \to 2 \to 3 \to 1$ — по часовой стрелке, работа газа положительна.

Пункт 2.

3. Работа за цикл — площадь прямоугольного треугольника с катетами $V_0 - V_0/2 = V_0/2$ (по V) и $3P_0 - P_0 = 2P_0$ (по P):

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_0}{2} \cdot 2P_0 = \frac{1}{2} P_0 V_0.$$



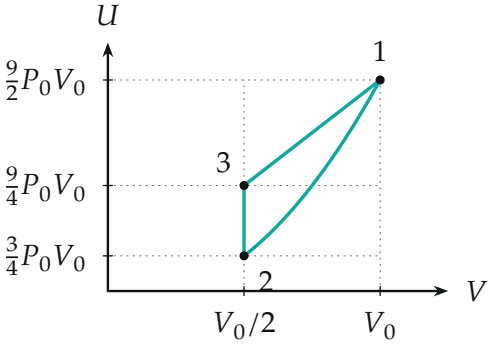
Работа газа за цикл — площадь треугольника.

4. Внутренняя энергия. Для одного моля одноатомного газа $U = \frac{3}{2}RT = \frac{3}{2}PV$. В вершинах цикла:

$$U_1 = \tfrac{9}{2}P_0V_0,\ U_2 = \tfrac{3}{4}P_0V_0,\ U_3 = \tfrac{9}{4}P_0V_0,$$

Но максимум по циклу может лежать и внутри участка 1–2, поэтому проверим его: на прямой $PV = P_0V_0\,(4x^2 - x)$, $x = V/V_0$, и эта функция растёт при $x > \frac{1}{8}$, то есть на всём участке $\frac{1}{2} \le x \le 1$. Значит на 1–2 энергия монотонно растёт к точке 1, и

$$U_{\max} = U_1 = \frac{9}{2} P_0 V_0.$$



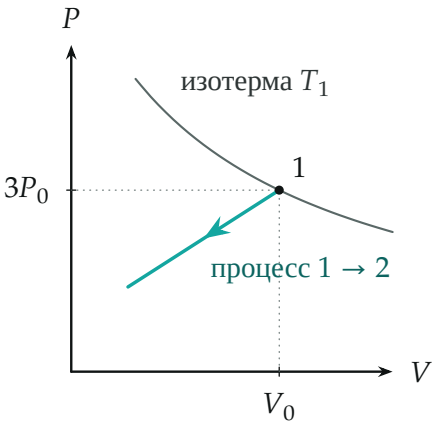
Цикл в координатах (V, U): на участке 1–2 энергия растёт вместе с объёмом, наибольшее значение — в точке 1.

5. Ответ. $P_0V_0 = \dfrac{2}{9}U_{\max}$, поэтому

$$A = \frac{1}{2}P_0V_0 = \frac{U_{\max}}{9} = \frac{4986}{9}\ \text{Дж} = 554\ \text{Дж}.$$

Пункт 3.

6. Куда идёт температура в начале сжатия. На участке 1–2 температура $T = PV/R \propto 4x^2 - x$. В точке 1 производная по x равна $8x - 1 = 7 > 0$: при уменьшении объёма температура падает. На графике прямая процесса уходит ниже изотермы точки 1.



Около точки 1: изотерма $PV = \text{const}$ (серая) и процесс $1 \to 2$. Прямая лежит ниже изотермы — температура падает.

7. Теплоёмкость в точке 1. На малом шаге из прямой процесса следует $dP = \dfrac{4P_0}{V_0}\,dV$, тогда

$$R\,dT = P\,dV + V\,dP = \Big(P + \frac{4P_0 V}{V_0}\Big)dV.$$

В точке 1 ($P = 3P_0$, $V = V_0$): $R\,dT = 7P_0\,dV$, то есть $P\,dV = 3P_0\,dV = \dfrac{3}{7}\,R\,dT$. Первое начало:

$$\delta Q = \frac{3}{2}R\,dT + \frac{3}{7}R\,dT = \frac{27}{14}\,R\,dT, \qquad C = \frac{27}{14}R.$$

Знак: $C > 0$ и $dT < 0$, значит $\delta Q < 0$: тепло отводится.

8. Числа.

$$|\Delta Q| = \frac{27}{14}\,R\,|\Delta T| = \frac{27}{14}\cdot 8{,}31 \cdot 1\ \text{Дж} \approx 16\ \text{Дж}.$$

Обратите внимание: 1) $\rho \propto 1/V$: график $P = a + b/\rho$ в координатах (P, V) — прямая, в (P, ρ) — гипербола с вертикальным сдвигом; 2) максимум U нужно искать на всём цикле, а не только в вершинах: проверено, что на 1–2 энергия монотонна; 3) $C = 27R/14$ — только в точке 1, дальше по процессу она другая; поэтому $|\Delta Q| = C|\Delta T|$ верно лишь для малого ΔT.

Проверка. Теплота на всём участке сжатия 1–2: $\delta Q = P_0V_0(16x - 2{,}5)\,dx$ при $dx < 0$ отрицательна везде, то есть тепло отводится на всём сжатии, как и сказано в условии. Прямой расчёт для $\Delta T = 1$ К (температура в точке 1: $T_1 = 3P_0V_0/R = 400$ К): объём меняется на 0,1%, $Q = \Delta U + A = 16{,}03$ Дж — совпадает с $\frac{27}{14}R \cdot 1$ К $= 16{,}03$ Дж.

Ответ. 1) график см. в решении; 2) $A = U_{\max}/9 = 554$ Дж; 3) $|\Delta Q| = \dfrac{27}{14}R|\Delta T| \approx 16$ Дж.