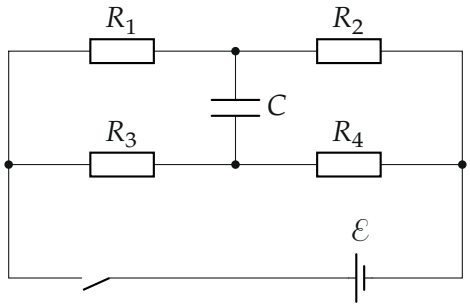
Начальное нарастание заряда в цепи с ключом

Задача 5. [Физтех 2024/25, 10 класс, варианты 10-05–10-06, задача 5] В цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы можно считать идеальными, ЭДС батареи $\mathcal{E} = 50$ В, сопротивления резисторов $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 24$ Ом, $R_3 = 18$ Ом, $R_4 = 12$ Ом. Внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало. До замыкания ключа заряд конденсатора нулевой. Ключ замыкают.

1. Найдите силу тока I, текущего через источник сразу после замыкания ключа.
2. На каком резисторе рассеивается наименьшая мощность сразу после замыкания ключа? Найдите эту мощность $P_{\min}$.
3. С какой скоростью $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ будет расти заряд конденсатора сразу после замыкания ключа?



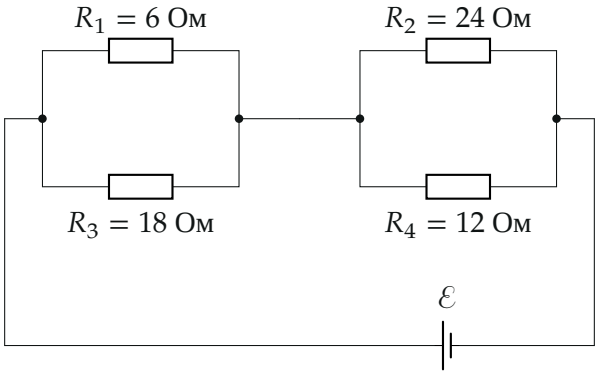
▲ **Решение. Что происходит.** В первый момент заряд конденсатора нулевой, значит и напряжение на нём нулевое: $U_C = q/C = 0$. Две точки, между которыми включён конденсатор, имеют одинаковый потенциал, поэтому в этот момент конденсатор ведёт себя как перемычка, и цепь превращается в обычное смешанное соединение резисторов. Ток в ветви конденсатора и есть скорость роста заряда. Класс задачи: цепь постоянного тока с конденсатором в начальный момент.

Обозначения. a — верхний узел между R_1, R_2 и конденсатором, b — нижний узел между R_3, R_4 и конденсатором. Левый узел батареи —

общий конец R_1 и R_3, правый — общий конец R_2 и R_4. Плюс батареи (длинная пластина) — слева.

Пункт 1.

1. Эквивалентная схема. При $U_C = 0$ потенциалы узлов a и b одинаковы, соединим их: получится один общий узел. Тогда R_1 и R_3 включены параллельно (между левым узлом и узлом ab), а R_2 и R_4 — параллельно (между узлом ab и правым узлом), и две пары соединены последовательно.



Эквивалентная схема сразу после замыкания: конденсатор заменён проводником, узлы a и b слились.

2. Сопротивление цепи.

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{6 \cdot 18}{24}\ \text{Ом} = 4{,}5\ \text{Ом},$$

$$R_{24} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{24 \cdot 12}{36}\ \text{Ом} = 8\ \text{Ом}.$$

Общее сопротивление $R_{\text{общ}} = R_{13} + R_{24} = 12{,}5$ Ом.

3. Закон Ома для всей цепи (внутреннее сопротивление батареи нулевое):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{общ}}} = \frac{50}{12{,}5}\ \text{А} = 4\ \text{А}.$$

Пункт 2.

4. Напряжения на парах. Через пары течёт один и тот же ток I (последовательное соединение), каждая пара — параллельное соединение с общим напряжением:

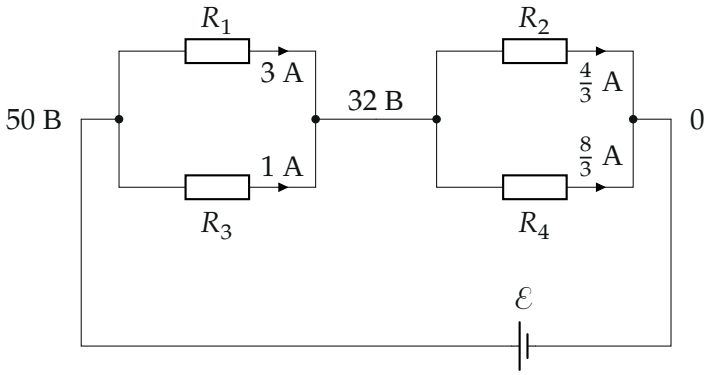
$$U_{13} = IR_{13} = 4 \cdot 4{,}5\ \text{В} = 18\ \text{В}, \qquad U_{24} = IR_{24} = 4 \cdot 8\ \text{В} = 32\ \text{В}.$$

Сумма $18 + 32 = 50$ В равна ЭДС, как и должно быть.

5. Токи в резисторах (закон Ома для участка):

$$I_1 = \frac{U_{13}}{R_1} = 3\ \text{А}, \qquad I_3 = \frac{U_{13}}{R_3} = 1\ \text{А},$$

$$I_2 = \frac{U_{24}}{R_2} = \frac{4}{3}\ \text{А}, \qquad I_4 = \frac{U_{24}}{R_4} = \frac{8}{3}\ \text{А}.$$



Токи через резисторы и потенциалы узлов сразу после замыкания (потенциал правого узла принят равным нулю).

6. Мощности. $P = U^2/R$ (или I^2R). Пары с одним напряжением: в паре R_1, R_3 мощность больше у меньшего сопротивления, поэтому из них наименьшая — у $R_3 = 18$ Ом; в паре R_2, R_4 наименьшая у $R_2 = 24$ Ом. Сравним:

$$P_3 = \frac{U_{13}^2}{R_3} = \frac{18^2}{18}\ \text{Вт} = 18\ \text{Вт}, \qquad P_2 = \frac{U_{24}^2}{R_2} = \frac{32^2}{24}\ \text{Вт} \approx 42{,}7\ \text{Вт}.$$

Остальные мощности ещё больше: $P_1 = 54$ Вт, $P_4 \approx 85{,}3$ Вт. Наименьшая мощность — на R_3:

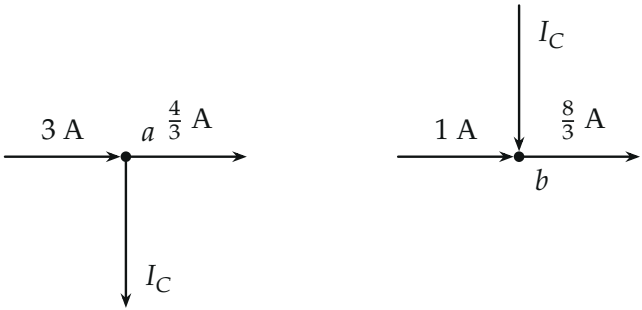
$$P_{\min} = P_3 = 18 \text{ Вт}.$$

Пункт 3.

7. Ток в ветви конденсатора. Скорость роста заряда равна силе тока, текущего «на конденсатор»: $\Delta Q/\Delta t = I_C$. Он находится из баланса токов в узле a (закон сохранения заряда, правило узлов): в узел a входит ток I_1 через R_1, выходит I_2 через R_2 и I_C в конденсатор:

$$I_C = I_1 - I_2 = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \text{ А} \approx 1{,}67 \text{ А}.$$

Проверим в узле b: входит $I_3 = 1$ А из R_3 и I_C из конденсатора, выходит $I_4 = \frac{8}{3}$ А: $1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$ — верно.

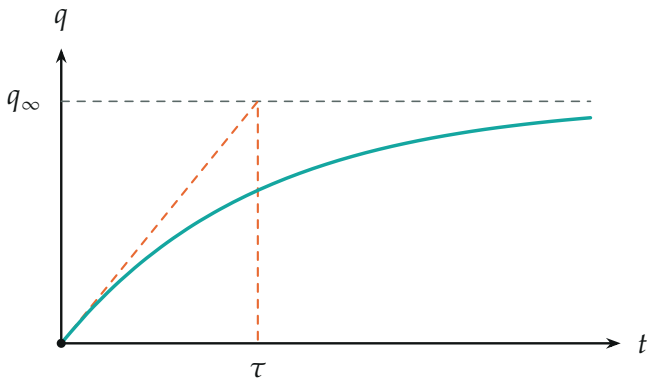


Баланс токов в узлах a и b: ток I_C идёт через конденсатор от a к b (заряжает верхнюю обкладку положительно).

Обратите внимание: 1) замена конденсатора перемычкой верна только сразу после замыкания, пока $q = 0$; позже на нём появится напряжение, и токи изменятся; 2) ток через источник и ток через конденсатор — разные величины: 4 А и $\frac{5}{3}$ А; 3) ток через конденсатор не равен нулю в первый момент, хотя разрыв в цепи есть: идёт зарядка, и $\Delta Q/\Delta t$ измеряется в амперах.

Проверка. Размерность: $\mathcal{E}/R$ — В/Ом = А; U^2/R — Вт; $\Delta Q/\Delta t$ — Кл/с = А. Второй способ для пункта 3 — метод потенциалов: примем по-

тенциал правого узла за нуль, потенциал левого 50 В, а общий потенциал узла ab обозначим φ. Сумма токов в узел: $\dfrac{50-\varphi}{6}+\dfrac{50-\varphi}{18}=\dfrac{\varphi}{24}+\dfrac{\varphi}{12}$, откуда $\varphi = 32$ В, токи те же. Третий способ — через конечное состояние: когда ток через конденсатор прекратится, токи идут по ветвям R_1R_2 и R_3R_4 по $\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$ А, потенциалы узлов 40 В и 20 В, напряжение на конденсаторе $U_\infty = 20$ В. Для конденсатора остальная цепь — источник с ЭДС 20 В и внутренним сопротивлением $R_1R_2/(R_1+R_2)+R_3R_4/(R_3+R_4) = 4{,}8 + 7{,}2 = 12$ Ом, и начальный ток зарядки $\dfrac{20}{12}=\dfrac{5}{3}$ А — совпало.



Заряд конденсатора со временем: скорость роста в момент $t = 0$ равна $\frac{5}{3}$ А (наклон касательной), потом заряд приближается к $q_\infty = CU_\infty$; касательная доходит до q_∞ за $\tau = (12\ Ом)\cdot C$.

Смысл: сразу после включения конденсатор пропускает заметный ток, почти как провод, потом заряд насыщается и ток спадает до нуля.

Ответ. 1) $I = 4$ А; 2) на резисторе R_3, $P_{\min} = 18$ Вт; 3) $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{5}{3}$ А $\approx 1{,}67$ А.