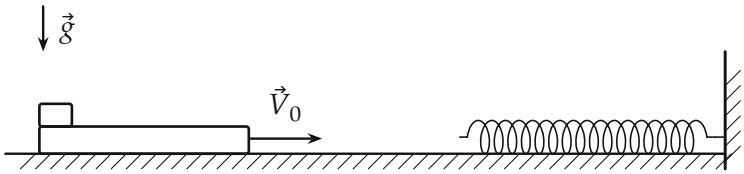
Доска с бруском и пружина

Задача 1. [Физтех 2024/25, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 1] Длинная доска массой $M = 2$ кг, на одном конце которой лежит небольшой брусок массой $m = 1$ кг, движется по горизонтальной гладкой поверхности со скоростью $V_0 = 2$ м/с. В некоторый момент доска начинает сжимать лежащую на поверхности лёгкую достаточно длинную пружину с коэффициентом жёсткости $k = 27$ Н/м, которая одним концом упирается в стенку (см. рис.). Коэффициент трения скольжения бруска по доске $\mu = 0{,}3$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Число «пи» в расчётах можете считать равным $\pi \approx 3$. Брусок и доска всё время движутся в одной вертикальной плоскости.

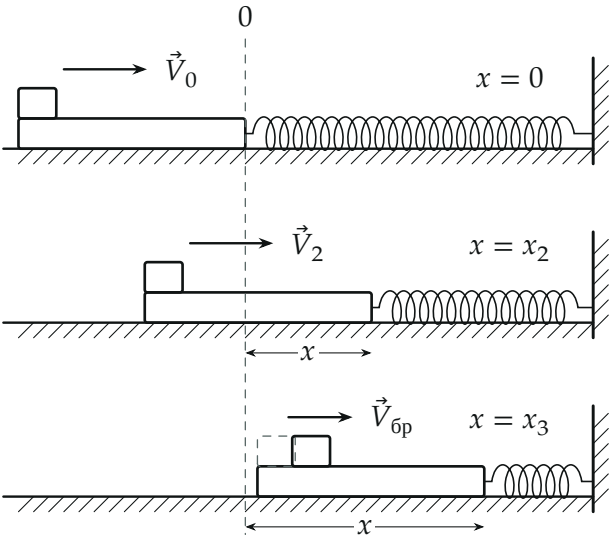
1. Найдите сжатие пружины в тот момент, когда начнётся относительное движение бруска и доски.
2. Найдите промежуток времени с момента начала сжатия пружины до момента начала относительного движения бруска и доски.
3. Найдите ускорение доски в момент максимального сжатия пружины.



▲ **Решение. Что происходит.** Доска въезжает на пружину и тормозится. Брусок тормозится только трением покоя, а оно ограничено значением μmg. Поэтому режимов два. Сначала доска и брусок едут как одно тело массой $M + m$ на пружине. Потом сила пружины становится слишком большой, брусок начинает скользить вперёд по доске, и доска колеблется под действием пружины и трения скольжения. Это задача со сменой режима: на границе режимов трение покоя максимально, а скорость и сжатие общие для обоих режимов, поэтому решения сшиваем по законам Ньютона и сохранения энергии.

Качественно: сжатие растёт → сила пружины растёт → ускорение растёт, а ускорение бруска не может превысить μg; в какой-то момент брусок «не успевает» за доской.

Обозначения. Ось x направим к стенке; x — сжатие пружины (и координата правого края доски), нуль — там, где доска коснулась недеформированной пружины. Индекс 2 — момент начала скольжения, индекс 3 — наибольшее сжатие; V — скорость доски, a_x — проекция её ускорения на ось x.



Три момента: касание пружины, начало скольжения, наибольшее сжатие. Пунктир — где стоял бы брусок без скольжения. Длина пружины и доски условные.

Пункт 1.

1. Система доска + брусок, пока скольжения нет. Опора гладкая, по горизонтали на систему действует только сила пружины (трение между доской и бруском внутреннее). Второй закон Ньютона для системы в проекции на ось x:

$$(M + m)\, a_x = -kx.$$

Знак минус: ускорение направлено от стенки, доска тормозится.

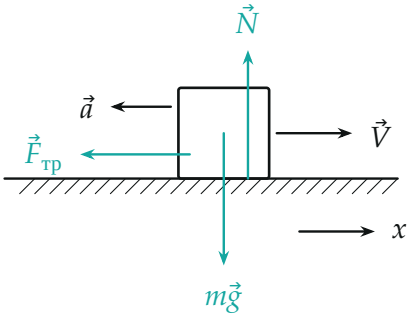
2. Брусок. По горизонтали на брусок действует только сила трения покоя со стороны доски. Второй закон Ньютона для бруска в проекции на x: $F_{\text{тр},x} = ma_x$, где a_x — то же ускорение, ведь брусок едет вместе с доской. Модуль силы:

$$|F_{\text{тр}}| = m|a_x| = \frac{m}{M+m}\,kx.$$

Сила растёт вместе с x, а трение покоя ограничено: $|F_{\text{тр}}| \le \mu N = \mu mg$ (по вертикали $N = mg$). Скольжение начнётся, когда сила дойдёт до предела:

$$\frac{m}{M+m}\,kx_2 = \mu mg \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\mu(M+m)g}{k} = \frac{0{,}3\cdot 3\cdot 10}{27} = \frac{1}{3}\text{ м}.$$

Обратите внимание: μmg — предел трения, а не сама сила. Пока скольжения нет, трение покоя равно ma и меньше предела.



Брусок. Пока сцеплен с доской: $F_{тр} = ma \le \mu mg$; при скольжении: $F_{тр} = \mu mg$, направлена назад.

Пункт 2.

3. Движение до скольжения. Из уравнения $(M+m)a_x = -kx$ получаем гармонические колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{k/(M+m)}$, то есть $\omega_0 = 3\ \text{с}^{-1}$. В момент касания пружины $x = 0$, а скорость наибольшая и равна V_0, поэтому

$$x = A_0 \sin\omega_0 t, \qquad A_0 = \frac{V_0}{\omega_0} = \frac{2}{3}\text{ м}.$$

Приравняем $x = x_2$ (так как $x_2 < A_0$, скольжение начнётся до остановки; берём первый корень, где x растёт):

$$\sin \omega_0 t_2 = \frac{x_2}{A_0} = \frac{1}{2}, \qquad \omega_0 t_2 = \frac{\pi}{6}, \qquad t_2 = \frac{\pi}{18}\ \text{с} \approx \frac{1}{6}\ \text{с}.$$

Пункт 3.

4. Что меняется после начала скольжения. В момент x_2 ускорение доски равно предельному ускорению бруска μg, а дальше сила пружины растёт, и доска тормозится сильнее. Брусок отстаёт в торможении и едет вперёд по доске. Сила трения скольжения на брусок направлена назад, на доску — вперёд (третий закон Ньютона), по модулю μmg. Второй закон Ньютона для доски в проекции на x:

$$Ma_x = -kx + \mu mg = -k(x - x_1), \qquad x_1 = \frac{\mu mg}{k} = \frac{1}{9}\ \text{м}.$$

Это колебания около новой точки равновесия x_1 с частотой $\omega = \sqrt{k/M}$, $\omega^2 = 13{,}5\ \text{с}^{-2}$: постоянная сила трения лишь сдвинула центр колебаний. Применимо, пока брусок скользит. В точке наибольшего сжатия доска стоит, то есть смещена от x_1 на амплитуду A:

$$x_3 = x_1 + A, \qquad a_m = \omega^2 A.$$

5. Скорость доски в момент x_2. Закон сохранения механической энергии системы доска + брусок + пружина от касания до x_2: опора гладкая, а работа сил трения покоя равна нулю в сумме (силы равны и противоположны, смещения одинаковы):

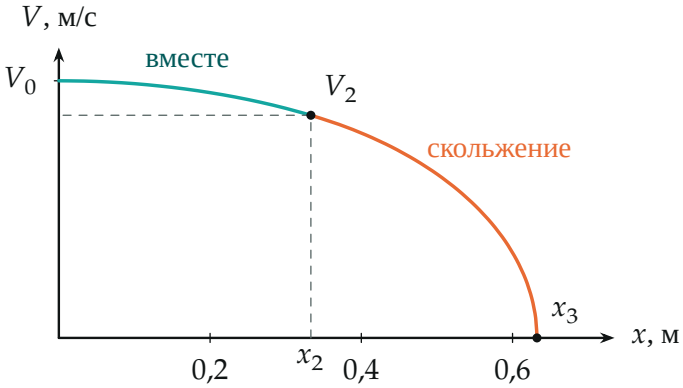
$$\frac{1}{2}(M+m)V_0^2 = \frac{1}{2}(M+m)V_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2,$$

$$V_2^2 = V_0^2 - \frac{kx_2^2}{M+m} = 4 - 1 = 3\ \text{м}^2/\text{с}^2.$$

6. Амплитуда. Для колебаний около x_1 сохраняется $\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}k(x -$

$x_1)^2 = \frac{1}{2}kA^2$. Подставим момент x_2 с найденной V_2:

$$A^2 = (x_2 - x_1)^2 + \frac{MV_2^2}{k} = \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \frac{2 \cdot 3}{27} = \frac{4}{81} + \frac{18}{81} = \frac{22}{81}, \qquad A = \frac{\sqrt{22}}{9}\ \text{м}.$$



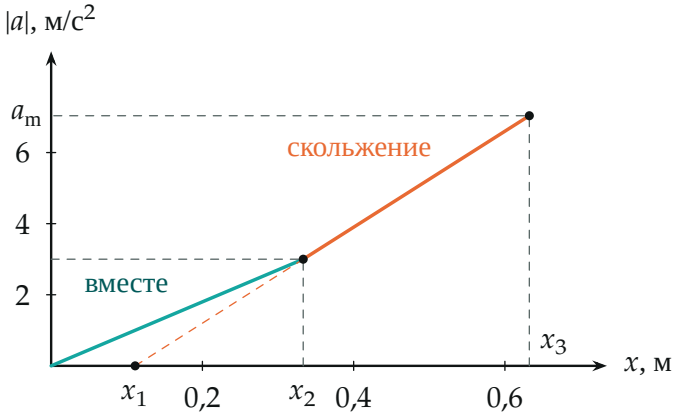
Скорость доски в зависимости от сжатия. Бирюзовая дуга — движение вместе ($V^2 + \omega_0^2 x^2 = V_0^2$), морковная — скольжение (колебания около x_1); в точке x_2 скорость и значение V_2 общие.

Ускорение в точке наибольшего сжатия:

$$a_m = \omega^2 A = \frac{k}{M} A = \frac{27}{2} \cdot \frac{\sqrt{22}}{9} = \frac{3}{2}\sqrt{22}\ \text{м/с}^2 \approx 7\ \text{м/с}^2.$$

Оно направлено от стенки: пружина отталкивает остановившуюся доску.

Обратите внимание: формула $a_m = \omega^2 A$ верна, только если брусок скользит до самой остановки доски. Проверим: от x_2 до x_3 проходит время $t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{x_2 - x_1}{A} \approx 0{,}31$ с, а скорость бруска падает с μg: $V_2 - \mu g t \approx 0{,}81$ м/с > 0. Брусок ещё едет вперёд, трение скольжения не меняет направления, и к этому моменту он успел сместиться по доске примерно на 9 см (длинная доска не кончилась).



Модуль ускорения доски. До x_2 — прямая $\omega_0^2 x$, дальше — прямая $\omega^2(x - x_1)$ (пунктир — её продолжение до нуля в x_1). Излом при x_2: брусок перестал «утяжелять» доску.

Проверка. Размерность: $\mu(M+m)g/k$ — кг·м/с^2 делить на Н/м, то есть метры. Предел $\mu \to 0$: $x_1 = x_2 = 0$, скольжение сразу, $A = V_0/\omega$ и $a_m = \omega V_0$ — как для доски одной на пружине. Второй способ для a_m: теорема о кинетической энергии доски на участке от x_2 до x_3 (работа пружины отрицательна, работа трения μmg положительна):

$$\frac{1}{2}MV_2^2 = \frac{1}{2}k(x_3^2 - x_2^2) - \mu mg(x_3 - x_2),$$

$$13{,}5\,x_3^2 - 3x_3 - 3{,}5 = 0, \qquad x_3 = \frac{1+\sqrt{22}}{9} \approx 0{,}63 \text{ м},$$

и $a_m = (kx_3 - \mu mg)/M = \frac{3}{2}\sqrt{22}$, как и выше. Смысл: брусок сначала «держится» трением, потом срывается, и после срыва доска, освободившись от части нагрузки, тормозится заметно резче.

Ответ. 1) $x_2 = \dfrac{\mu(M+m)g}{k} = \dfrac{1}{3}$ м; 2) $t_2 = \dfrac{\pi}{18}$ с $\approx \dfrac{1}{6}$ с; 3) $a_m = \dfrac{3}{2}\sqrt{22}$ м/с^2 ≈ 7 м/с^2.