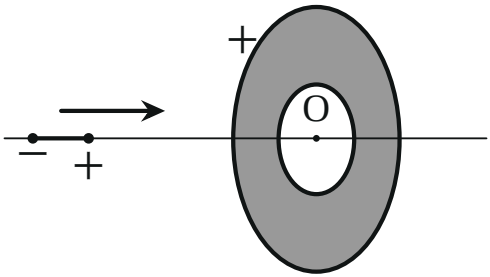
Диполь пролетает сквозь отверстие в диске

Задача 3. [Физтех 2024/25, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 3] В плоском тонком диске в форме круга имеется круглое отверстие (см. рис.). Центры диска и отверстия совпадают в точке O. Диск имеет однородно распределённый по поверхности положительный заряд. Система из двух жёстко связанных равных по модулю и противоположных по знаку точечных зарядов (диполь) движется с некоторой начальной скоростью из бесконечно удалённой точки вдоль оси симметрии диска и пролетает через отверстие. Заряды диполя находятся на маленьких шариках, на диполь действуют только силы электрического поля диска, диск закреплён, при пролёте диполь не отклоняется от оси диска. Минимальная начальная скорость диполя, необходимая для пролёта, равна V_0. Диполю сообщают начальную скорость $2V_0$.

1. Найдите скорость диполя при пролёте центра диполя через центр отверстия.
2. Найдите разность максимальной и минимальной скоростей диполя при пролёте.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Диск закреплён, трения нет, на диполь действуют только силы электрического поля, а оно потенциально. Поэтому сохраняется полная энергия: $\frac{1}{2}mV^2 + W(x) = \text{const}$, где m — масса диполя, x — координата его центра на оси, $W(x)$ — энергия взаимодействия диполя с диском (на бесконечности $W = 0$). Главная идея — симметрия: диск симметричен относительно своей плоскости, потенциал на оси чётен по x, а значит, энергия диполя $W(x)$ нечётна. Тогда

барьер перед диском и яма за ним одинаковы по высоте, а в центре отверстия $W = 0$. Барьер W_m задаёт минимальную скорость пролёта: $\frac{1}{2}mV_0^2 = W_m$. Задача на закон сохранения энергии для заряженных тел: потенциальная энергия — через потенциал, ответ — через симметрию.

Качественно: положительный заряд впереди, он отталкивается положительным диском и тормозит диполь, пока тот не подойдёт к диску вплотную; внутри отверстия диполь затягивается и разгоняется, а выйдя за диск, снова тормозится.

Обозначения. x — координата центра диполя вдоль оси, $x = 0$ — в плоскости диска, ось по ходу движения; $2b$ — расстояние между зарядами, $+q$ впереди (в точке $x + b$), $-q$ позади (в точке $x - b$); $\varphi(x)$ — потенциал диска на оси.

Пункт 1.

1. Энергия диполя. Потенциальная энергия системы двух зарядов в поле диска — сумма энергий каждого заряда:

$$W(x) = q\,\varphi(x + b) - q\,\varphi(x - b).$$

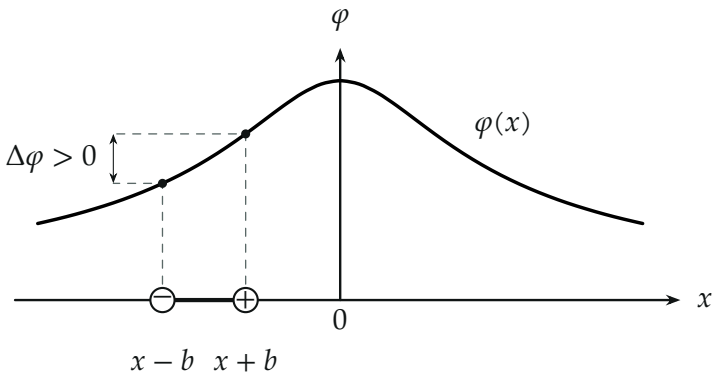
Диск симметричен относительно своей плоскости, поэтому $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Тогда

$$W(-x) = q\,\varphi(-x+b) - q\,\varphi(-x-b) = q\,\varphi(x-b) - q\,\varphi(x+b) = -W(x),$$

и в центре отверстия $W(0) = 0$: оба заряда там в точках, симметричных относительно диска, потенциал одинаков.

2. Закон сохранения энергии. Между бесконечностью и центром отверстия действуют только силы поля, диск неподвижен, поэтому энергия системы «диполь + диск» сохраняется. На бесконечности $W = 0$ и скорость $2V_0$, в центре отверстия $W(0) = 0$ и скорость V_c:

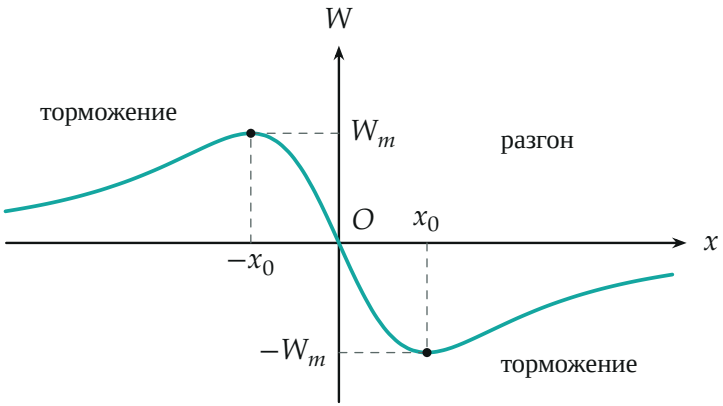
$$\frac{1}{2}m(2V_0)^2 + 0 = \frac{1}{2}mV_c^2 + W(0) \quad \Rightarrow \quad V_c = 2V_0.$$



Потенциал положительного диска с отверстием на оси: максимум в центре, спад в обе стороны. Диполь в точке $x < 0$: положительный заряд ближе к диску, где потенциал выше, поэтому $W > 0$.

Пункт 2.

3. Форма кривой $W(x)$**.** Слева от диска ($x < 0$) положительный заряд $+q$ ближе к диску, чем $-q$, то есть находится в точке с большим потенциалом: $W > 0$, диполь тормозится. На большом удалении и в центре $W = 0$, значит, между ними у W есть максимум; пусть он в точке $x = -x_0$ и равен W_m. По нечётности $W(+x_0) = -W_m$ — там минимум, диполь внутри и за диском разгоняется, потом выходит на бесконечность, где снова $W = 0$.



Энергия диполя $W(x)$ (для радиусов отверстия и диска 1 и 2, $2b = 1{,}1$). Нечётность: кривая переходит в себя при повороте на 180° вокруг точки O.

4. Минимальная начальная скорость. Для пролёта нужно подняться на вершину барьера W_m в точке $x = -x_0$. При скорости V_0 диполь доходит до вершины и там останавливается, поэтому по закону сохранения энергии $\frac{1}{2}mV_0^2 = W_m$.

Обратите внимание: V_0 — скорость на бесконечности, при которой диполь едва доходит до вершины барьера; она задаёт только W_m. Размеры диска и диполя входят в ответ лишь через W_m.

5. Крайние скорости при $2V_0$. Запишем закон сохранения энергии для произвольной точки: $\frac{1}{2}m(2V_0)^2 = \frac{1}{2}mV^2 + W(x)$. Скорость наименьшая там, где W наибольшая ($x = -x_0$), и наибольшая там, где W наименьшая ($x = +x_0$):

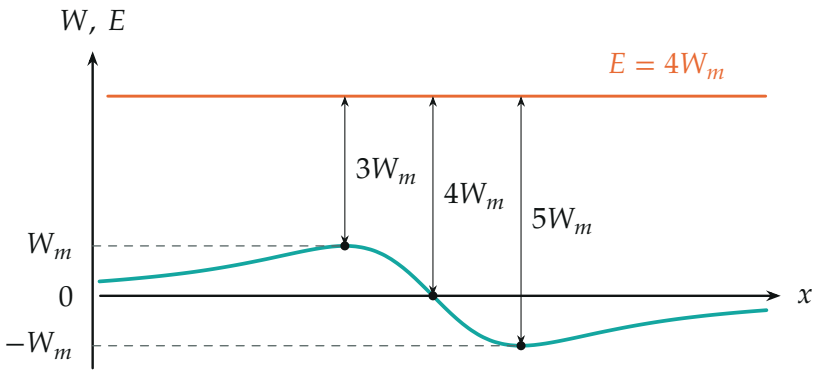
$$\frac{1}{2}m(2V_0)^2 = \frac{1}{2}mV_{\min}^2 + W_m, \qquad \frac{1}{2}m(2V_0)^2 = \frac{1}{2}mV_{\max}^2 - W_m.$$

Подставим $W_m = \frac{1}{2}mV_0^2$:

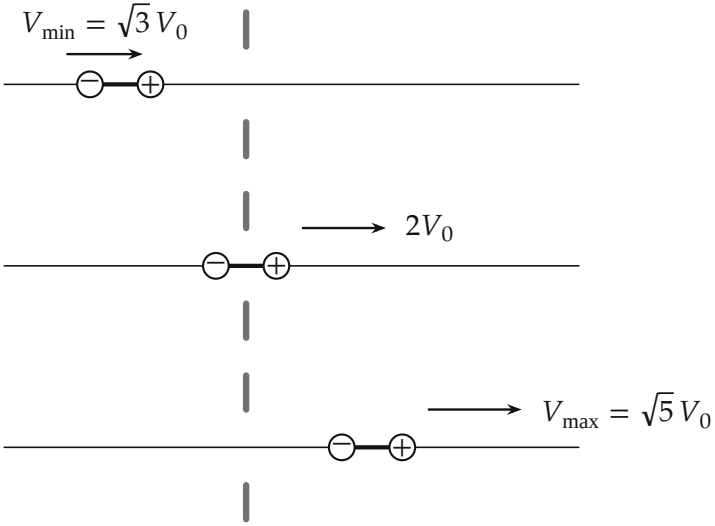
$$V_{\min}^2 = 4V_0^2 - V_0^2 = 3V_0^2, \qquad V_{\max}^2 = 4V_0^2 + V_0^2 = 5V_0^2.$$

Итак, $V_{\min} = \sqrt{3}\,V_0$, $V_{\max} = \sqrt{5}\,V_0$ и

$$V_{\max} - V_{\min} = V_0\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) \approx 0{,}50\,V_0.$$



Полная энергия $E = 4W_m$ (морковная линия); кинетическая энергия — расстояние от кривой W до неё: $3W_m$, $4W_m$, $5W_m$.



Три момента пролёта: у барьера (наименьшая скорость), в центре отверстия, у минимума энергии (наибольшая скорость). Серые отрезки — сечение диска, длина стрелок по скоростям.

Проверка. Размерность: все скорости — в единицах V_0. Второй способ для разности: $V_{\max}^2 - V_{\min}^2 = \frac{2}{m} \cdot 2W_m = 2V_0^2$, откуда $V_{\max} - V_{\min} = \dfrac{2V_0^2}{V_{\max} + V_{\min}} = \dfrac{2V_0}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = V_0(\sqrt{5} - \sqrt{3})$, как и выше. Предел: при начальной скорости ровно V_0 формула $V_{\min}^2 = V_{\text{нач}}^2 - V_0^2$ даёт 0 — диполь останавливается на вершине барьера, как в определении V_0. Смысл: у ямы скорость больше, чем у барьера, потому что диполь, пройдя барьер, получает энергию W_m назад, а в яме ещё столько же сверх того.

Ответ. 1) $V_c = 2V_0$; 2) $V_{\max} - V_{\min} = V_0\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) \approx 0{,}50\,V_0$.