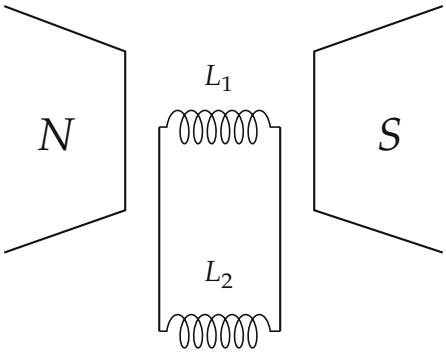
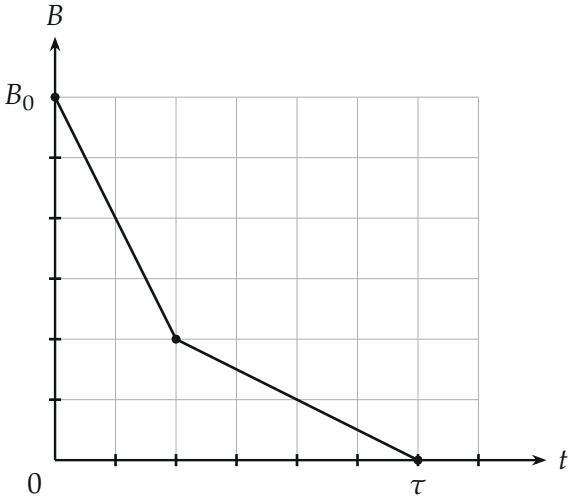
Катушки при выключении внешнего поля

Задача 4. [Физтех 2024/25, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 4] Катушка индуктивностью $L_1 = L$ с числом витков n и площадью каждого витка S_1 находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией B_0. Силовые линии поля перпендикулярны плоскости каждого витка. Вторая катушка индуктивностью $L_2 = 4L$ находится вне поля (см. рис.). Сопротивление катушек и соединительных проводов пренебрежимо мало. Изначально тока в катушках нет. Внешнее поле выключают в течение времени τ. Зависимость индукции внешнего поля от времени показана на рисунке. Взаимной индуктивностью катушек пренебречь.

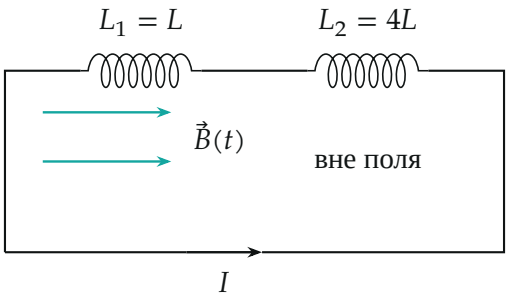
1. Найдите ток I_0 через катушку L_1 в конце выключения внешнего поля.
2. Найдите заряд, протекший через катушку L_1 за время выключения внешнего поля.





▲ **Решение. Что происходит.** Катушки и провода образуют замкнутый контур без сопротивления. Закон Ома для такого контура: сумма всех ЭДС равна нулю в каждый момент, ведь падать напряжению на сопротивлении нечему. Внешнее поле убывает, и в катушке L_1 возникает ЭДС индукции; чтобы сумма осталась нулевой, в контуре появляется ток, ЭДС самоиндукции которого её уравновешивает. Катушка L_2 вне поля, но тот же ток течёт и через неё, поэтому её самоиндукция тоже входит в уравнение. Класс задачи: индукция → ЭДС → цепь (одно уравнение для контура, затем суммирование по времени).

Обозначения. I — ток контура, $B(t)$ — индукция внешнего поля, $\Phi_{\text{внеш}} = nS_1B$ — поток внешнего поля через все n витков катушки L_1. Положительное направление тока выберем так, чтобы поток его собственного поля через L_1 шёл вдоль $\vec{B}$. Катушки соединены последовательно и не связаны взаимной индуктивностью, поэтому ток у них общий, а ЭДС самоиндукции складываются.



Контур из двух катушек: внешнее поле действует только на L_1, ток I у катушек общий.

Пункт 1.

1. Уравнение контура. Запишем закон Ома для контура без сопротивления: сумма ЭДС равна произведению тока на сопротивление, то есть нулю. ЭДС индукции во внешнем поле по закону Фарадея — производная потока, взятая со знаком минус; ЭДС самоиндукции в каждой катушке — $-L_k\,dI/dt$:

$$-nS_1\frac{dB}{dt} - L_1\frac{dI}{dt} - L_2\frac{dI}{dt} = 0.$$

Здесь индукция внешнего поля $B(t)$ убывает, поэтому $dB/dt < 0$ и $dI/dt > 0$: ток растёт — в согласии с правилом Ленца (контур сопротивляется убыванию потока).

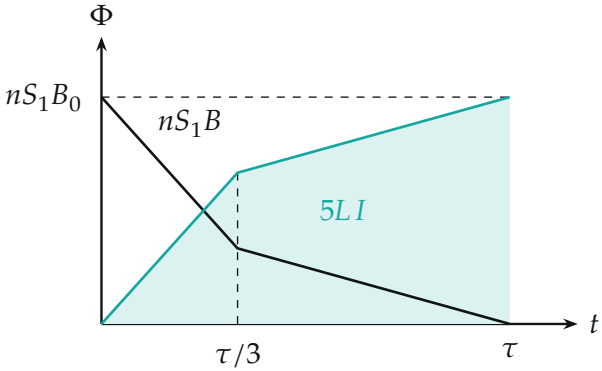
2. Суммирование по времени. Рассмотрим малый промежуток dt: изменения величин dB и dI связаны уравнением $-nS_1\,dB = (L_1 + L_2)\,dI$. Сложим такие равенства от начала выключения ($B = B_0$, $I = 0$) до произвольного момента t:

$$-nS_1\,(B - B_0) = (L_1 + L_2)\,(I - 0),$$

$$I(t) = \frac{nS_1\,(B_0 - B)}{L_1 + L_2} = \frac{nS_1\,(B_0 - B)}{5L}.$$

Формула верна в любой момент выключения: ток определяется только текущим значением B, а не тем, как оно менялось. Иначе: сумма потока внешнего поля и потока самоиндукции остаётся постоянной, $nS_1B +$

$5LI = nS_1B_0$ — «контур без сопротивления сохраняет полный поток».



Потоки в контуре: внешний nS_1B (чёрная ломаная) убывает, поток самоиндукции $5LI$ (бирюзовая) растёт, их сумма постоянна и равна nS_1B_0. Область под бирюзовой кривой закрашена.

3. Ток в конце выключения. Внешнее поле выключено полностью: $B(\tau) = 0$. Подставляем в формулу пункта 2:

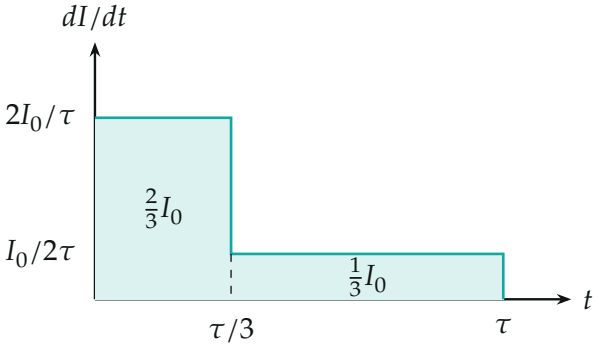
$$I_0 = I(\tau) = \frac{nS_1B_0}{5L}.$$

Пункт 2.

4. График тока. Заряд, протёкший через катушку за время τ, равен сумме $I\,dt$, то есть площади под графиком $I(t)$. Ток зависит от B линейно, а график $B(t)$ — ломаная с изломом при $t_1 = \tau/3$, где по клеткам сетки $B_1 = B_0/3$ (два деления из шести). Значит, и график тока — ломаная с тем же изломом. Значения тока в вершинах:

$$I(0) = 0, \qquad I_1 = I(t_1) = \frac{nS_1\,(B_0 - B_0/3)}{5L} = \frac{2}{3}\,I_0, \qquad I(\tau) = I_0.$$

Угловые коэффициенты показывает рисунок ниже: на первом участке $dI/dt = I_1/t_1 = 2I_0/\tau$, на втором $dI/dt = (I_0 - I_1)/(\tau - t_1) = I_0/(2\tau)$; поле на первом участке убывает вчетверо быстрее, и ток растёт вчетверо быстрее.



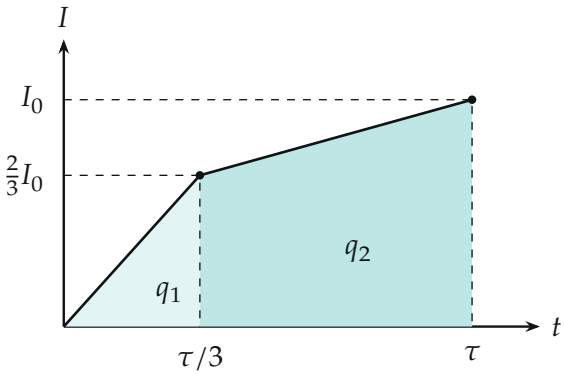
Скорость роста тока: площади прямоугольников — приращения тока $\frac{2}{3}I_0$ и $\frac{1}{3}I_0$ в сумме дают I_0.

5. Площадь под графиком тока. Разобьём площадь на треугольник при $0 < t < t_1$ и трапецию при $t_1 < t < \tau$, их площади — заряды q_1 и q_2:

$$q_1 = \frac{1}{2}\, I_1\, t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} I_0 \cdot \frac{\tau}{3} = \frac{1}{9}\, I_0 \tau,$$

$$q_2 = \frac{I_1 + I_0}{2}\,(\tau - t_1) = \frac{5I_0/3}{2} \cdot \frac{2\tau}{3} = \frac{5}{9}\, I_0 \tau,$$

$$q = q_1 + q_2 = \frac{2}{3}\, I_0 \tau = \frac{2}{3} \cdot \frac{nS_1 B_0}{5L}\, \tau = \frac{2}{15}\, \frac{nS_1 B_0 \tau}{L}.$$



Заряд q — площадь под графиком $I(t)$: треугольник q_1 и трапеция q_2.

Обратите внимание: заряд нельзя считать как площадь треугольника $\frac{1}{2}I_0\tau$. График тока — ломаная, вершина излома $\frac{2}{3}I_0$ лежит выше прямой, соединяющей начало координат с точкой $(\tau;\, I_0)$ (на ней в момент $\tau/3$ было бы только $\frac{1}{3}I_0$): ток вначале растёт быстрее. Поэтому площадь больше:

$$q = \frac{2nS_1B_0\tau}{15L} \quad \text{вместо} \quad \frac{nS_1B_0\tau}{10L}.$$

6. Второй способ для заряда. Подставим $I = nS_1(B_0 - B)/(5L)$ в $q = \int I\,dt$:

$$q = \frac{nS_1}{5L}\Big(B_0\tau - \int_0^\tau B\,dt\Big).$$

Площадь под графиком $B(t)$ — две трапеции:

$$\int_0^\tau B\,dt = \frac{B_0 + B_0/3}{2}\cdot\frac{\tau}{3} + \frac{B_0/3}{2}\cdot\frac{2\tau}{3} = \frac{2B_0\tau}{9} + \frac{B_0\tau}{9} = \frac{B_0\tau}{3}.$$

Тогда

$$q = \frac{nS_1}{5L}\Big(B_0\tau - \frac{B_0\tau}{3}\Big) = \frac{2}{15}\,\frac{nS_1B_0\tau}{L}$$

— тот же результат.

Проверка. Размерность: nS_1B_0 — потокосцепление (Вб), деление на L (Гн = Вб/А) даёт ампер, умножение на τ — кулон. Предел $L_2 \to 0$: контур из одной катушки, $I_0 = nS_1B_0/L$, то есть $LI_0 = nS_1B_0$ — катушка без сопротивления сохраняет поток. Предел $L_2 \to \infty$: $I_0 \to 0$, большая индуктивность не пускает ток. Смысл: четыре пятых ЭДС приходится на вторую катушку, где нет поля, и ток получается в пять раз меньше, чем в одиночной катушке L_1.

Ответ. 1) $I_0 = \dfrac{nS_1B_0}{5L}$; 2) $q = \dfrac{2}{15}\,\dfrac{nS_1B_0\tau}{L}$.