Линза и шар с зеркальной задней стенкой

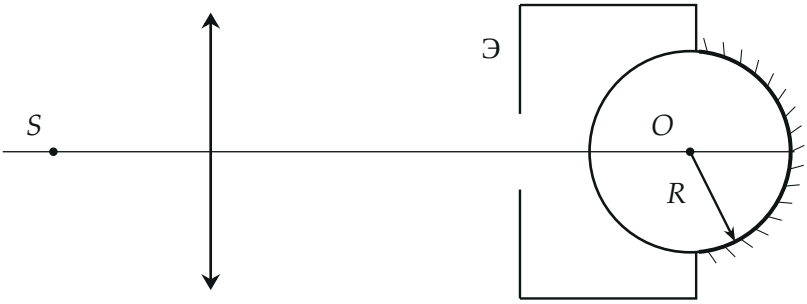
Задача 5. [Физтех 2024/25, 11 класс, варианты 11-01–11-04, задача 5] На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F расположены центр O прозрачного шара и точечный источник S, удалённый от линзы на расстояние $a = 1{,}5F$ (см. рис.). На поверхность шара, противоположную поверхности входа лучей, нанесено идеально отражающее зеркальное покрытие. С шаром жёстко скреплён непрозрачный экран Э с небольшим круглым отверстием. Если шар расположен так, что расстояние от центра линзы до ближайшей к нему точки шара равно $b = \dfrac{8F}{3}$, то изображение источника в системе «линза–шар» совпадает с самим источником при любом показателе преломления вещества шара.

1. Найти радиус R шара.

После того, как центр шара переместили вдоль оптической оси так, что расстояние от шара до центра линзы увеличилось на $\Delta = 2F$, изображение источника снова совпало с самим источником.

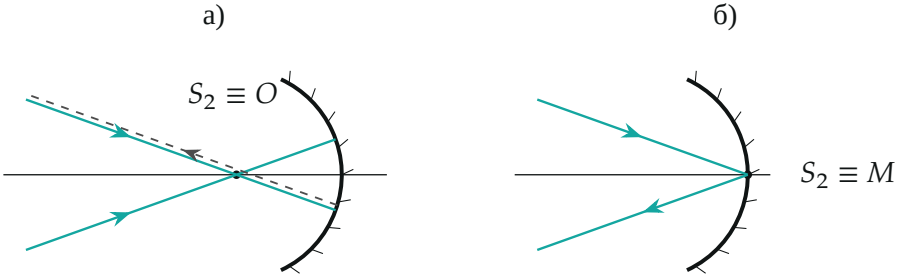
2. Найти показатель преломления вещества шара.

Отражение света от наружной поверхности шара пренебрежимо мало. Экран Э обеспечивает малость углов α лучей, падающих на шар, с оптической осью и справедливость приближения $\sin\alpha \approx \alpha$.



▲ **Решение. Что происходит.** Свет от S проходит линзу, преломляется на передней поверхности шара, отражается от зеркального покрытия и возвращается тем же путём через шар и линзу. Изображение совпадёт

с источником, если лучи на обратном пути пройдут в обратном порядке те же точки, что и на прямом (обратимость хода лучей). Рассуждаем по цепочке изображений: линза даёт изображение S_1 источника S; передняя поверхность шара даёт изображение S_2 точки S_1; зеркало отражает лучи обратно. На обратном пути лучи вернутся в S_1, а затем в S, если зеркало переводит точку S_2 саму в себя. Для сферического зеркала радиуса R с центром O при расстоянии d от зеркала до точки уравнение $\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{2}{R}$ даёт $d'=d$ в двух случаях: $d=R$ (точка в центре O) и $d=0$ (точка на самом зеркале, в его вершине M). Первый случай — пункт 1, второй — пункт 2. Условие «при любом показателе преломления» сразу указывает на первый случай: он от n не зависит.



Два случая возврата. а) Лучи сходятся в центре O, падают на зеркало по радиусам и возвращаются по тем же лучам (обратный ход — пунктир, смещён для наглядности). б) Лучи сходятся в вершине M зеркала и отражаются симметрично относительно оси: луч, шедший вверху, уходит вниз и тем же путём вернётся в точку-источник.

Обозначения. f — расстояние от линзы до изображения S_1; R — радиус шара; b — расстояние от центра линзы до ближайшей к ней точки шара (передней вершины V); n — показатель преломления шара. Расстояния отсчитываем вдоль оси от линзы. Экран Э оставляет лишь лучи, мало отклонённые от оси: везде малые углы.

Пункт 1.

1. Изображение источника в линзе. Запишем формулу тонкой линзы для источника S ($a=\frac{3}{2}F$ — расстояние до источника, f — до изобра-

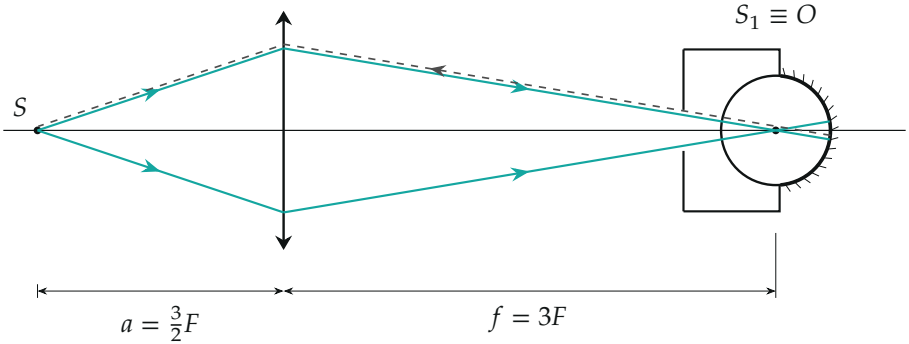
жения):

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{f}=\frac{1}{F}-\frac{2}{3F}=\frac{1}{3F} \quad\Longrightarrow\quad f=3F.$$

Пучок после линзы сходится в точку S_1 на оси на расстоянии $3F$ от линзы.

2. Условие возврата и радиус. Лучи вернутся в источник, если S_1 лежит в центре шара O (первый случай): лучи, идущие к O, проходят переднюю поверхность по нормали и не преломляются, падают на зеркало тоже по радиусам и отражаются назад по тем же путям при любом n. Центр шара находится на расстоянии $b+R$ от линзы, поэтому

$$b+R=f \quad\Longrightarrow\quad R=f-b=3F-\frac{8F}{3}=\frac{F}{3}.$$



Пункт 1: линза собирает лучи от S в точку S_1, которая совпадает с центром шара O; лучи идут к зеркалу по радиусам и возвращаются. Обратный путь показан пунктиром (на деле он совпадает с прямым).

Обратите внимание: R находится из условия «центр шара в S_1», а не «передняя поверхность в S_1». Расстояние b дано до ближайшей точки шара, поэтому добавляется радиус.

Пункт 2.

3. Положение S_1 после сдвига. Изображение источника в линзе от положения шара не зависит: S_1 остаётся на расстоянии $3F$ от линзы.

Шар сместился на $\Delta = 2F$ от линзы, его передняя вершина теперь на расстоянии $b + \Delta = \frac{14F}{3}$. Значит, S_1 лежит вне шара, перед его передней поверхностью, на расстоянии

$$a_1 = (b + \Delta) - 3F = \frac{14F}{3} - 3F = \frac{5F}{3} = \Delta - R.$$

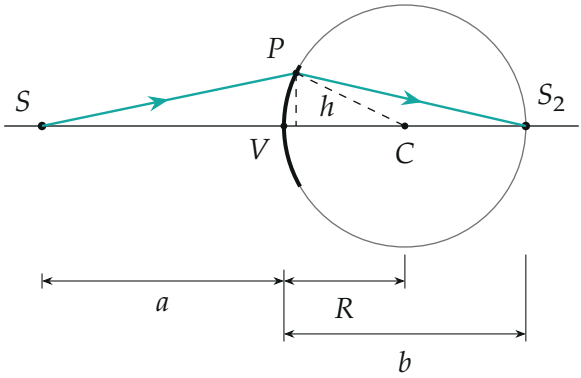
Для передней поверхности шара S_1 — точечный источник с расходящимся пучком.

4. Условие возврата. Центр шара теперь на расстоянии $5F$ от линзы, S_1 в него не попадает, поэтому работает второй случай: изображение S_2 источника S_1 в передней поверхности шара должно лежать на зеркале, в его вершине M. Вершина зеркала — конец диаметра, проведённого через переднюю вершину V, значит, расстояние от поверхности до S_2 равно диаметру:

$$b_1 = 2R = \frac{2F}{3}.$$

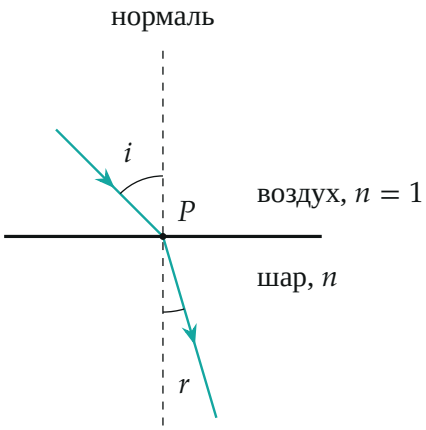
Отражённые в M лучи идут симметрично прямым относительно оси, выходят из шара через переднюю поверхность и по обратимости сходятся в S_1, а затем линза возвращает их в S.

5. Формула преломления на сферической поверхности. Нужна связь расстояний a_1, b_1 и показателя n. Выведем её для малых углов. Пусть из точки S на оси (расстояние a до вершины V сферической поверхности радиуса R с центром C) идёт луч, который падает на поверхность в точке P на малой высоте h над осью.



Луч из точки S падает на поверхность в точке P на высоте h и после преломления пересекает ось в точке S_2. Числа выбраны для рисунка ($a = b = 2R$, $n = 3$).

Углы малы, поэтому $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$. Луч SP образует с осью угол $\alpha = h/a$, а радиус CP — угол $\varphi = h/R$. Угол падения i — угол между лучом и нормалью PC; он равен внешнему углу треугольника SPC: $i = \alpha + \varphi = \dfrac{h}{a} + \dfrac{h}{R}$. Закон преломления $\sin i = n \sin r$ при малых углах даёт $i = nr$. Преломлённый луч отклонён от нормали на угол r, а нормаль наклонена к оси на φ, поэтому преломлённый луч образует с осью угол $\gamma = \varphi - r$ и приходит на ось на расстоянии $b = h/\gamma$ от V.



Увеличенный фрагмент у точки P: углы падения i и преломления r отсчитываются от нормали, $\sin i = n \sin r$. Масштаб углов не соблюдён.

Подставим всё в $\gamma = \varphi - r$:

$$\frac{h}{b} = \frac{h}{R} - \frac{1}{n}\left(\frac{h}{a} + \frac{h}{R}\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{R}.$$

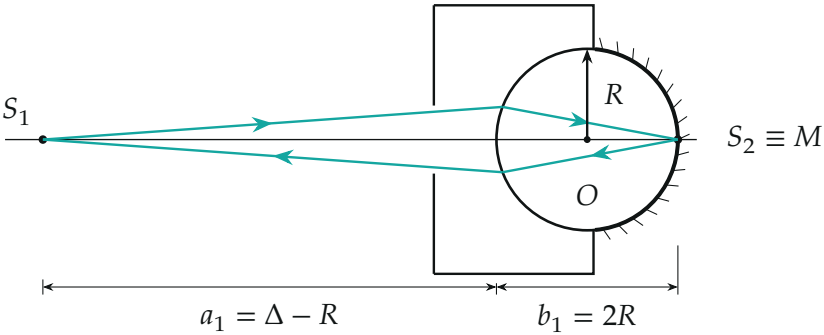
Высота h сократилась: все лучи пучка пересекаются в одной точке. Формула справедлива для выпуклой к источнику поверхности ($R > 0$) и изображения за ней ($b > 0$).

6. Показатель преломления. Применим формулу к передней поверх-

ности шара: $a = a_1 = \frac{5F}{3}$, $b = b_1 = \frac{2F}{3}$, $R = \frac{F}{3}$:

$$\frac{3}{5F} + \frac{3n}{2F} = \frac{3\,(n-1)}{F} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{5} + \frac{3n}{2} = 3n - 3,$$

$$\frac{3}{2}n = \frac{18}{5} \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$



Пункт 2: пучок от S_1 расходится, преломляется на передней поверхности и сходится в вершине M зеркала. Отражённые лучи идут симметрично относительно оси и возвращаются в S_1. Наклоны лучей на схеме увеличены.

Обратите внимание: в формуле a_1 — расстояние от S_1 до *поверхности* шара, а не до его центра; b_1 — от поверхности до S_2. Если подставить расстояния до центра, получится другое число.

Проверка. Размерность: в формуле преломления все слагаемые имеют размерность 1/длина. Предел: для параллельного пучка ($a \to \infty$) $b = nR/(n-1)$, при $n = 2$ это $2R$ — шар с $n = 2$ собирает пучок на заднюю стенку. Для источника на конечном расстоянии изображение лежит дальше, поэтому чтобы оно попало на заднюю стенку, нужно $n > 2$; найденное $n = 2{,}4$ подходит. Второй способ — расчёт хода лучей по точным законам преломления и отражения (малая высота, $F = 1$, $R = \frac{1}{3}$): при центре шара на расстоянии $3F$ луч возвращается в S при $n = 1{,}5$ и 2,4; при центре на $5F$ и $n = 2{,}4$ — в точку $-1{,}5F$, то есть в S, а при $n = 2{,}0$ и 2,5 — в $-1{,}17F$ и $-1{,}39F$. Смысл: шар с зеркальной задней стенкой возвращает свет в источник, когда лучи падают на зеркало по радиусам либо сходятся на самом зеркале.

Ответ. 1) $R = \dfrac{F}{3}$; 2) $n = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$.