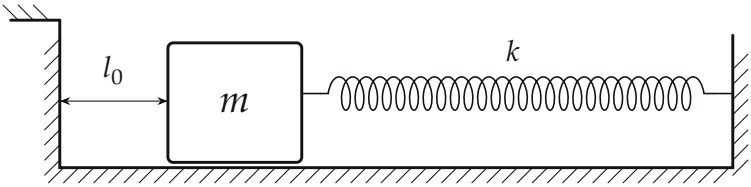
Тело на пружине ударяется об уступ

Задача 1. [Физтех 2024/25, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 1] Покоящееся на гладкой горизонтальной поверхности тело массой m прикреплено к стене лёгкой достаточно длинной пружиной жёсткостью k. На расстоянии l_0 от тела находится вертикальный уступ, как показано на рисунке. Сжимая пружину на $\dfrac{11l_0}{4}$, тело придвигают к стене и отпускают без начальной скорости. После первого удара тела о уступ максимальное сжатие пружины оказалось $\dfrac{5l_0}{2}$. Все удары о уступ считать частично упругими, при которых отношение кинетических энергий после удара и до удара можно считать постоянным. Каждая точка тела движется вдоль одной горизонтальной прямой.

1. Определите скорость тела при прохождении положения равновесия перед первым ударом.
2. Определите величину максимального сжатия пружины после второго удара.
3. Сколько времени прошло между моментом отпускания тела и моментом максимального сжатия пружины после первого удара?

В ответе допустимы обратные тригонометрические функции.

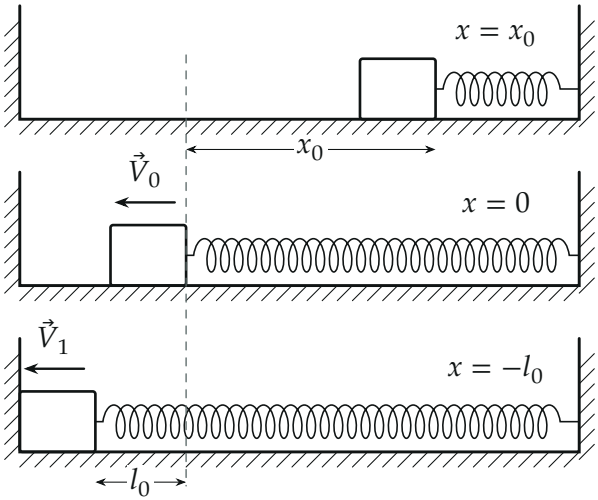


▲ **Решение.** **Что происходит.** Тело колеблется на пружине, но слева его останавливает уступ: тело доходит до положения, где пружина растянута на l_0, ударяется, теряет часть энергии и возвращается. Между ударами потерь нет, поэтому работает закон сохранения механической энергии системы «тело + пружина». При ударе меняется только кинетическая энергия: деформация пружины не успевает измениться. По условию доля сохранившейся кинетической энергии при каждом ударе одна

и та же, значит, кинетические энергии в момент удара образуют геометрическую прогрессию. Время складывается из кусков гармонического колебания, его удобно считать по фазе.

Качественно: каждый удар уменьшает полную энергию, поэтому амплитуда падает: $x_0 > x_1 > x_2$.

Обозначения. x — деформация пружины (положительна при сжатии), нуль — положение равновесия; уступ стоит в $x = -l_0$ (пружина там растянута). $x_0 = \frac{11}{4} l_0$ — сжатие при отпускании, $x_1 = \frac{5}{2} l_0$ и x_2 — наибольшие сжатия после первого и второго ударов; $\omega = \sqrt{k/m}$. W_1 — кинетическая энергия перед первым ударом, W_2 — сразу после него, W_3 — сразу после второго удара.



Три состояния: отпускание (сжатие x_0, скорость нуль), прохождение положения равновесия (скорость V_0), касание уступа (скорость V_1). Пунктир — правый край бруска в положении равновесия.

Пункт 1.

1. Закон сохранения энергии от отпускания до равновесия. Поверхность гладкая, удара ещё не было. В начале энергия только у пружины, в положении равновесия — только кинетическая:

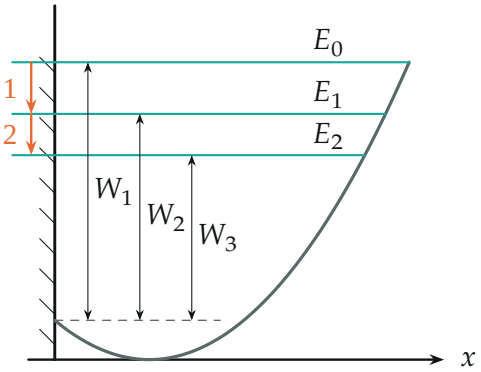
$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m V_0^2 \quad \Rightarrow \quad V_0 = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{11}{4} l_0 \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Пункт 2.

2. Энергия на каждом участке. В точке удара $x = -l_0$ энергия пружины равна $\frac{1}{2}kl_0^2$. Закон сохранения энергии для участков между ударами (от отпускания до первого удара, от первого удара до наибольшего сжатия, от второго удара до наибольшего сжатия):

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = W_1 + \frac{1}{2}kl_0^2, \qquad \frac{1}{2}kx_1^2 = W_2 + \frac{1}{2}kl_0^2, \qquad \frac{1}{2}kx_2^2 = W_3 + \frac{1}{2}kl_0^2.$$

Отсюда $W_1 = \frac{k}{2}(x_0^2 - l_0^2)$, $W_2 = \frac{k}{2}(x_1^2 - l_0^2)$, $W_3 = \frac{k}{2}(x_2^2 - l_0^2)$.



Энергия пружины $\frac{1}{2}kx^2$ (серая кривая) и полные энергии $E_0 > E_1 > E_2$ (бирюзовые линии). Расстояние по вертикали от высоты кривой в точке $x = -l_0$ (пунктир) до линий — кинетические энергии W_1, W_2, W_3; морковные стрелки — удары 1 и 2.

3. Постоянство доли энергии при ударе. Для первого удара

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{x_1^2 - l_0^2}{x_0^2 - l_0^2} = \frac{21/4}{105/16} = \frac{4}{5}.$$

Так как отношение одно и то же для каждого удара, $W_3 = \frac{4}{5}W_2$, то есть $x_2^2 - l_0^2 = \frac{4}{5}(x_1^2 - l_0^2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{21}{4} l_0^2$. Отсюда

$$x_2^2 = \frac{26}{5} l_0^2, \qquad x_2 = l_0\sqrt{\frac{26}{5}} \approx 2{,}28\, l_0.$$

Обратите внимание: перед вторым ударом кинетическая энергия равна W_2, а не W_1: после первого удара полная энергия $\frac{1}{2}kx_1^2$, и в той же точке $x = -l_0$ тело снова приходит с той же кинетической энергией W_2. Умножать на 0,8 нужно именно её.

Пункт 3.

4. Разбиение времени. До наибольшего сжатия после первого удара тело проходит четыре участка, на каждом движение — кусок гармонического колебания с частотой ω (удар считаем мгновенным):

1. от отпускания до положения равновесия — четверть периода, $\pi/(2\omega)$;
2. от равновесия до уступа: $x = -x_0 \sin \omega t'$, условие $x_0 \sin \omega t_1 = l_0$, откуда $t_1 = \omega^{-1} \arcsin \frac{4}{11}$;
3. от уступа после удара до равновесия: амплитуда теперь x_1, $x_1 \sin \omega t_2 = l_0$, $t_2 = \omega^{-1} \arcsin \frac{2}{5}$;
4. от равновесия до наибольшего сжатия — снова четверть периода, $\pi/(2\omega)$.

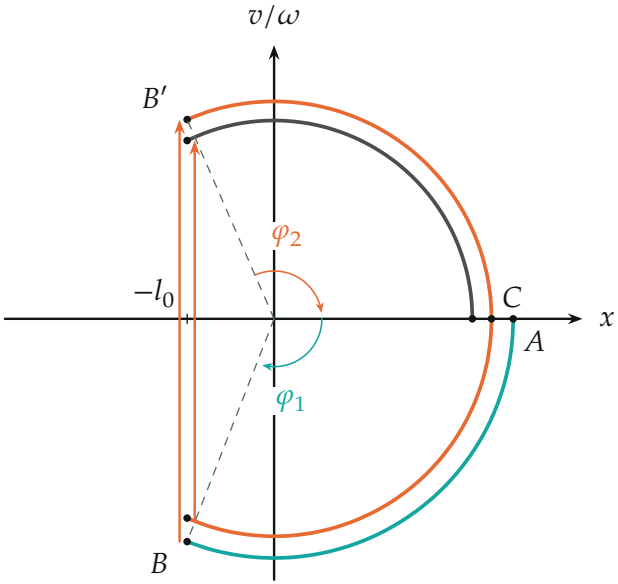
Складываем:

$$\tau = \frac{\pi}{2\omega} + t_1 + t_2 + \frac{\pi}{2\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\pi + \arcsin \frac{4}{11} + \arcsin \frac{2}{5} \right) \approx 3{,}93 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

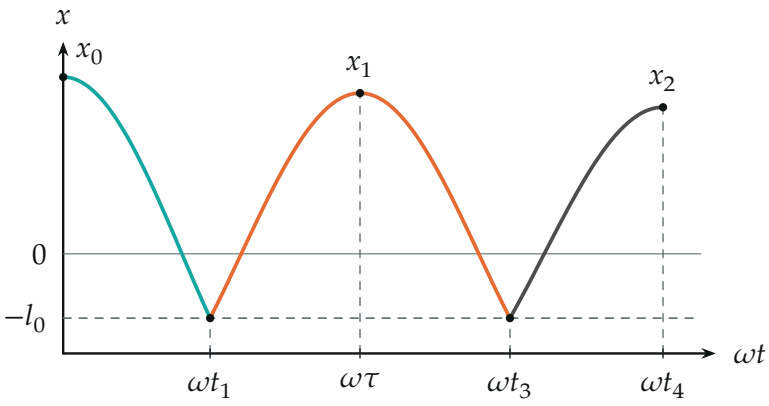
Второй способ — по фазе (рисунок ниже). Угол φ_1 от A до B найдём из $x_0 \cos \varphi_1 = -l_0$, угол φ_2 от B' до C — из $x_1 \cos \varphi_2 = -l_0$:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{4}{11}, \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2}{5}, \qquad \omega\tau = \varphi_1 + \varphi_2,$$

то есть тот же результат.



Тот же путь на фазовой плоскости: точка $(x,\ v/\omega)$ идёт по окружности радиуса, равного амплитуде, по часовой стрелке с угловой скоростью ω. Удар — скачок вдоль $x = -l_0$ на окружность меньшего радиуса. A — отпускание, B, B' — до и после первого удара, C — наибольшее сжатие после него.



Координата $x(\omega t)$: три куска косинусоид с убывающей амплитудой, срезанные уступом $x = -l_0$ (пунктир). Бирюзовый — до первого удара, морковный — между ударами, серый — после второго.

Проверка. Размерность: $x_0\sqrt{k/m}$ — м/с, $\sqrt{m/k}$ — секунды, арксинусы безразмерны. Предел $l_0 \to 0$: уступ у положения равновесия, $\tau \to \pi\sqrt{m/k}$ — половина периода, как и должно быть: четверть до равновесия и четверть после. Второй способ для x_2: при втором ударе теряется $\frac{1}{5}W_2$, поэтому $\frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{5}W_2$, то есть

$$x_2^2 = x_1^2 - \frac{1}{5}\,(x_1^2 - l_0^2) = \frac{26}{5}\,l_0^2,$$

тот же ответ; $x_2 < x_1 < x_0$, как и ожидалось. Смысл: каждый удар отнимает одну пятую кинетической энергии в точке удара, колебание обрезается уступом, и амплитуда понемногу убывает.

Ответ. 1) $V_0 = \dfrac{11}{4}\,l_0\sqrt{\dfrac{k}{m}}$;

2) $x_2 = l_0\sqrt{\dfrac{26}{5}}$;

3) $\tau = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\,(\pi + \arcsin\frac{4}{11} + \arcsin\frac{2}{5})$.