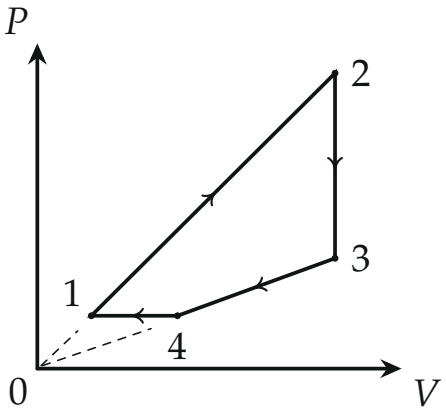
Цикл тепловой машины с молярной теплоёмкостью

Задача 2. [Физтех 2024/25, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 2] Рабочим телом тепловой машины, работающей по циклу 1-2-3-4-1, является идеальный газ (см. рис.). Участки цикла 1-2 и 3-4 лежат на прямых, проходящих через начало координат, 2-3 — изохора, 4-1 — изобара. На каждом из участков 2-3 и 4-1 от газа было отведено количество теплоты Q ($Q > 0$). Молярная теплоёмкость газа в процессе 3-4 равна $C = 3R$, R — универсальная газовая постоянная. Отношение температур $T_4/T_1 = \dfrac{5}{2}$.

1. Найти молярную теплоёмкость газа в процессе 4-1.
2. Найти работу газа за цикл.
3. Найти КПД цикла.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Идеальный газ проходит цикл из двух лучей, идущих через начало координат PV, изохоры и изобары. Теплоёмкость на луче $P = \alpha V$ постоянна, но не равна ни C_V, ни C_P — её находим из первого начала термодинамики. Теплоты на изохоре и изобаре выражаются через C_V, C_P и разности температур, а температуры связаны геометрией лучей. За цикл внутренняя энергия возвращается к исходной, поэтому работа равна сумме теплот: $A = \sum Q_{ij}$. Это задача

на цикл: теплота каждого участка → работа за цикл → КПД как отношение работы к полученной теплоте.

Обозначения. ν — число молей; T_i — температура в точке i; Q_{ij} — теплота, полученная газом на участке i-j (отрицательна, если газ теплоту отдаёт). Для отведённой теплоты в условии $Q_{23} = Q_{41} = -Q$. Лучи: $P = \alpha V$ (1-2) и $P = \beta V$ (3-4), $\alpha > \beta$.

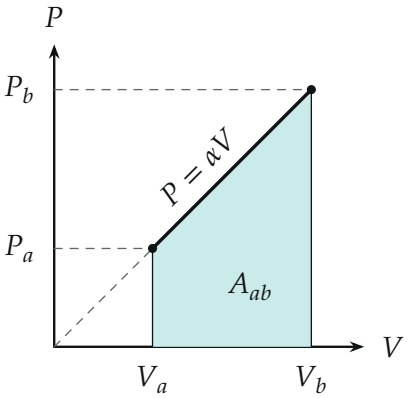
Пункт 1.

1. Теплоёмкость на луче $P = \alpha V$. Первое начало термодинамики для малого шага: $dQ = \nu C_V\, dT + P\, dV$. На луче работа малого шага $P\, dV = \alpha V\, dV = \frac{1}{2}\, d(\alpha V^2) = \frac{1}{2}\, d(PV)$, а по уравнению Менделеева — Клапейрона $PV = \nu RT$, то есть $P\, dV = \frac{1}{2}\nu R\, dT$. Поэтому

$$dQ = \nu\Big(C_V + \frac{R}{2}\Big)dT \quad \Rightarrow \quad C_{\text{луч}} = C_V + \frac{R}{2}.$$

Это верно для любого луча через начало координат, в том числе для 1-2 и 3-4 (у них разные α, но теплоёмкость одна). Из $C_{34} = 3R$:

$$C_V + \frac{R}{2} = 3R \quad \Rightarrow \quad C_V = \frac{5}{2}R.$$



Работа на луче $P = \alpha V$ — площадь трапеции: $A_{ab} = \frac{1}{2}(P_a + P_b)(V_b - V_a) = \frac{1}{2}\alpha(V_b^2 - V_a^2) = \frac{1}{2}\nu R\,(T_b - T_a)$.

2. Изобара 4-1. Для изобары $C_{41} = C_P = C_V + R$ (формула Майера):

$$C_{41} = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R.$$

Обратите внимание: на луче через начало координат теплоёмкость $C_V + \frac{R}{2}$, а не C_V и не C_P. Путать нельзя: на 1-2 и 3-4 берём $3R$, на изохоре — C_V, на изобаре — C_P.

Пункт 2.

3. Теплоты участков. Данные условия: на изохоре $Q_{23} = \nu C_V(T_3 - T_2) = -Q$, на изобаре $Q_{41} = \nu C_P(T_1 - T_4) = -Q$. Отсюда разности температур:

$$T_2 - T_3 = \frac{Q}{\nu C_V} = \frac{2Q}{5\nu R}, \qquad T_4 - T_1 = \frac{Q}{\nu C_P} = \frac{2Q}{7\nu R}.$$

Теплоты на лучах (теплоёмкость $3R$):

$$Q_{12} = 3\nu R\,(T_2 - T_1), \qquad Q_{34} = 3\nu R\,(T_4 - T_3).$$

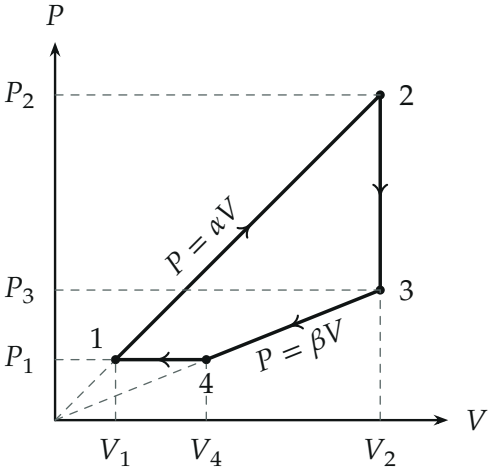
4. Работа за цикл. За цикл $\Delta U = 0$, значит, $A = Q_{12}+Q_{23}+Q_{34}+Q_{41}$. Сгруппируем: $Q_{12} + Q_{34} = 3\nu R\,[(T_2 - T_3) + (T_4 - T_1)]$, и температуры входят только разностями, которые уже известны:

$$Q_{12} + Q_{34} = 3\nu R\Big(\frac{2Q}{5\nu R} + \frac{2Q}{7\nu R}\Big) = \frac{72}{35}\,Q, \qquad A = \frac{72}{35}Q - 2Q = \frac{2}{35}\,Q.$$

Знак: $A > 0$, газ в действительности совершает работу (цикл идёт по часовой стрелке).

Пункт 3.

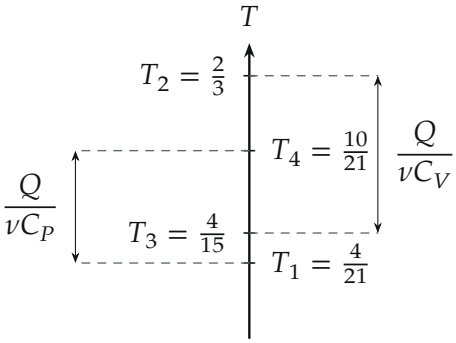
5. Связь температур. Точки 2 и 3 лежат на одной вертикали (изохора), поэтому $T_2/T_3 = P_2/P_3 = \alpha V_2/(\beta V_2) = \alpha/\beta$. Точки 4 и 1 лежат на одной горизонтали (изобара), $P_1 = P_4$, поэтому $T_4/T_1 = V_4/V_1 = (P_4/\beta)/(P_1/\alpha) = \alpha/\beta$. Значит, $T_2/T_3 = T_4/T_1 = \frac{5}{2}$.



Цикл в координатах PV: отношение давлений в точках 2 и 3 и отношение объёмов в точках 4 и 1 — одно и то же, α/β, а значит, равны и отношения температур.

6. Температуры. Из $T_4 - T_1 = \dfrac{2Q}{7\nu R}$ и $T_4 = \frac{5}{2}T_1$ получаем $\frac{3}{2}T_1 = \dfrac{2Q}{7\nu R}$. Аналогично для $T_2 - T_3 = \dfrac{2Q}{5\nu R}$ и $T_2 = \frac{5}{2}T_3$:

$$T_1 = \frac{4Q}{21\nu R}, \qquad T_3 = \frac{4Q}{15\nu R}, \qquad T_2 = \frac{2Q}{3\nu R}, \qquad T_4 = \frac{10Q}{21\nu R}.$$



Температуры в единицах $Q/(\nu R)$; скобки: $T_4 - T_1$ слева, $T_2 - T_3$ справа.

7. Где газ получает теплоту. КПД — отношение работы к теплоте, *полученной* газом за цикл, поэтому сначала надо найти *все* участки, где теплота подводится. Зачем это проверять: на рисунке участок 3-4 похож на охлаждение, но рисунок схематичен, решают числа. Сравним температуры концов участка 3-4:

$$T_4 = \frac{10Q}{21\nu R} = \frac{50}{105}\frac{Q}{\nu R} > T_3 = \frac{4Q}{15\nu R} = \frac{28}{105}\frac{Q}{\nu R}.$$

Температура на 3-4 растёт, а теплоёмкость $C = 3R > 0$, значит газ там тоже *получает* теплоту:

$$Q_{12} = 3\nu R\,(T_2 - T_1) = \frac{10}{7}\,Q, \qquad Q_{34} = 3\nu R\,(T_4 - T_3) = \frac{22}{35}\,Q.$$

Знак: обе теплоты положительны — газ нагревается на обоих лучах. Почему так вышло, видно и без счёта температур: равенство $Q_{23} = Q_{41}$ даёт $\nu C_V(r-1)T_3 = \nu C_P(r-1)T_1$, то есть $T_3/T_1 = C_P/C_V = \frac{7}{5}$, а $T_4/T_1 = r = \frac{5}{2} > \frac{7}{5}$. Участок 3-4 был бы охлаждением, как на рисунке, только при $T_4/T_1 < \frac{7}{5}$; при числах условия точка 4 лежит на луче дальше точки 3, и изобара 4-1 пересекает изохору 2-3 — цикл самопересекающийся.

8. КПД. Полученная теплота $Q_+ = Q_{12} + Q_{34} = \frac{50+22}{35}\,Q = \frac{72}{35}\,Q$, и

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{2Q/35}{72Q/35} = \frac{1}{36}.$$

Почему не $\frac{1}{25}$. У организаторов $\eta = A/Q_{12} = \frac{1}{25}$: они, следуя рисунку, считают 3-4 участком отдачи теплоты и теплоту Q_{34} не учитывают. Но при данных числах $T_4 > T_3$, и газ на 3-4 теплоту получает; по определению КПД через теплоту, полученную за цикл, она обязана войти в знаменатель. Работа $A = \frac{2}{35}Q$ и теплоёмкость C_{41} от этого не зависят — они верны при любой форме цикла. Поэтому верным при числах условия мы считаем $\eta = \frac{1}{36}$; ответ $\frac{1}{25}$ получился бы, если бы отношение T_4/T_1 было меньше $\frac{7}{5}$ (тогда, правда, изменились бы и A, и температуры).



Теплоты участков (бирюзовые — получена, морковные — отдана): $50-35+22-35=2$ *в единицах* $Q/35$.

Проверка. Размерность: A и Q — джоули, η безразмерен. Второй способ для работы — по участкам: на луче $A_{ij}=\frac{1}{2}\nu R\,\Delta T$ (рисунок с трапецией), на изобаре $A_{41}=\nu R\,(T_1-T_4)$, на изохоре работы нет:

$$A=\frac{1}{2}\nu R\,(T_2-T_1)+\frac{1}{2}\nu R\,(T_4-T_3)+\nu R\,(T_1-T_4),$$

$$A=\Big(\frac{5}{21}+\frac{11}{105}-\frac{2}{7}\Big)Q=\frac{2}{35}\,Q,$$

как и по первому началу. Теплота на 1-2 сходится: $Q_{12}=\nu C_V(T_2-T_1)+A_{12}=\frac{5}{2}\cdot\frac{10}{21}Q+\frac{5}{21}Q=\frac{10}{7}Q$. Смысл: цикл с малым КПД (меньше 3 %) — почти вся теплота возвращается газом в виде теплоты, а не работы.

Ответ. 1) $C_{41}=\frac{7}{2}R$; 2) $A=\frac{2}{35}\,Q$; 3) $\eta=\frac{1}{36}$ (у организаторов $\frac{1}{25}$ — без теплоты, полученной на участке 3-4; см. п. 7).