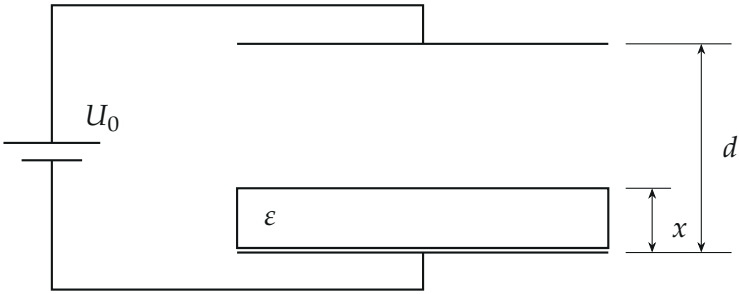
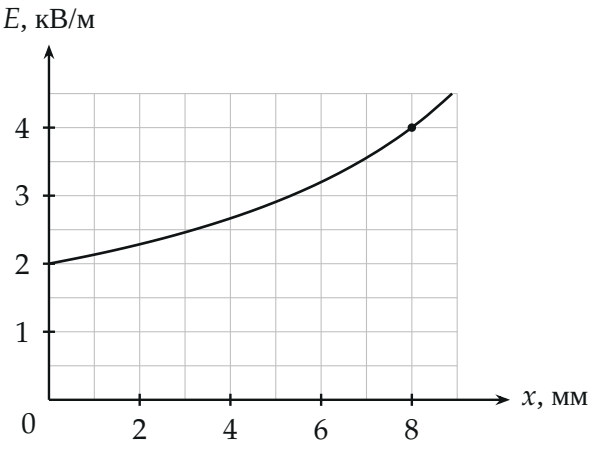
# Пластина диэлектрика в конденсаторе

**Задача 3.** [Физтех 2024/25, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 3] Плоский конденсатор подсоединён к источнику постоянного напряжения. Расстояние между обкладками $d = 12$ мм (см. рис.). В конденсатор вставляется пластина из диэлектрика толщиной $x$ (пластина занимает часть объёма конденсатора, равную $x/d$). Известна часть графика зависимости напряжённости электрического поля в воздушном зазоре от толщины пластины $x$ (см. рис.). Диэлектрическую проницаемость воздуха принять равной единице.

1. Найти напряжение $U_0$ источника.
2. Найти диэлектрическую проницаемость $\varepsilon$ диэлектрика.



▲ **Решение. Что происходит.** Конденсатор всё время подключён к источнику, поэтому напряжение между обкладками остаётся равным $U_0$ при любой толщине пластины. Напряжение — это работа поля по переносу единичного заряда от одной обкладки к другой, то есть сумма падений напряжения на воздушном зазоре и на пластине. Пластина ослабляет поле внутри себя, но сумма падений должна остаться равной $U_0$, поэтому поле в оставшемся воздушном зазоре растёт вместе с $x$. Это и показывает график. Класс задачи: напряжение как сумма падений на слоях с однородным полем.

**Обозначения.** $E$ — напряжённость поля в воздушном зазоре (по графику она зависит от $x$), $E_д$ — в диэлектрике. Толщина зазора $d - x$: пластина лежит на нижней обкладке, поэтому воздух остаётся только над ней. Единицы: 1 кВ/м $=$ 1 В/мм, так что расстояния в миллиметрах, а поля в кВ/м дают напряжение в вольтах без пересчёта.

**Пункт 1.**

**1. Напряжение источника.** При $x = 0$ пластины нет, поле однородно и занимает весь промежуток $d$. Падение напряжения в однородном поле равно $Ed$, и оно равно напряжению источника:

$$U_0 = E(0)\,d = 2\ \text{В/мм} \cdot 12\ \text{мм} = 24\ \text{В}.$$

Значение $E(0) = 2$ кВ/м читаем на графике в точке пересечения кривой с вертикальной осью.

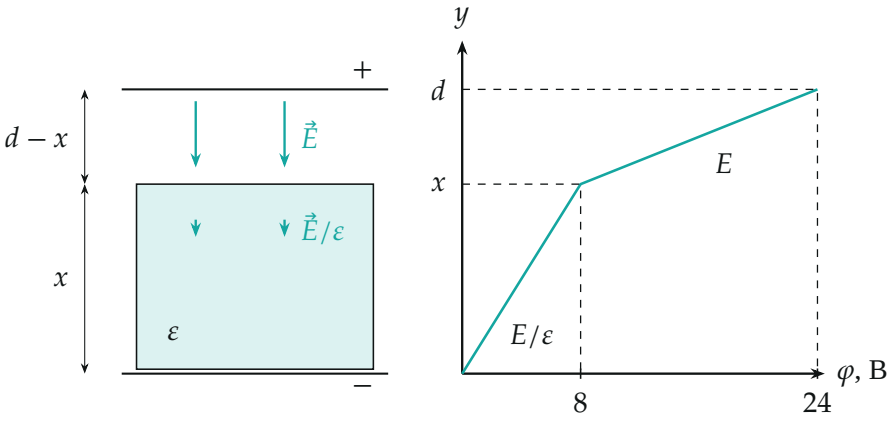
**Пункт 2.**

**2. Поле в пластине.** Пластина лежит на нижней обкладке, поэтому свободный заряд обкладки с поверхностной плотностью $\sigma$ создаёт одно и то же электрическое смещение $D$ и в диэлектрике, и в воздушном зазоре: на границе воздух—диэлектрик свободных зарядов нет, $D$ не прерывается (теорема Гаусса для коробочки, одной гранью лежащей в диэлектрике, другой — в воздухе). Поэтому

$$\varepsilon_0 E = \varepsilon\varepsilon_0 E_д \quad \Longrightarrow \quad E_д = \frac{E}{\varepsilon}.$$

Поле в пластине в $\varepsilon$ раз слабее, чем в зазоре: заряды, связанные на по-

верхностях диэлектрика, частично компенсируют поле обкладок.




*Слева — поле в зазоре и в пластине (длины стрелок по расчёту для $\varepsilon = 4$), справа — потенциал вдоль оси $y$: на пластине он растёт полого, на зазоре круче.*

**3. Напряжение как сумма падений.** Поле в каждом слое однородно, поэтому падение напряжения на слое равно полю, умноженному на толщину. Напряжение источника — сумма падений на зазоре и на пластине:

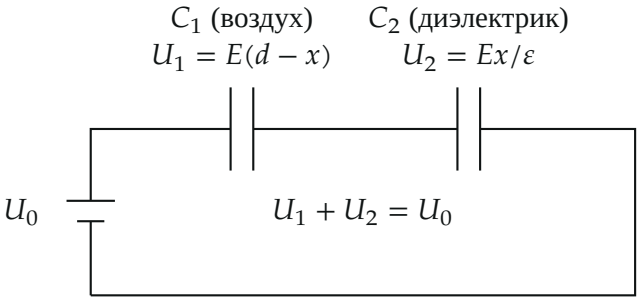
$$U_0 = E\,(d - x) + \frac{E}{\varepsilon}\,x.$$

Это уравнение справедливо при любом $x$ из графика: $U_0$ и $\varepsilon$ от $x$ не зависят, меняются только $E$ и $x$. Неизвестной остаётся одна величина $\varepsilon$; для неё нужна одна точка графика с $x \neq 0$. Берём точку $x = 8$ мм, где кривая проходит через узел сетки и $E = 4$ кВ/м. Делим уравнение на $E$ (в мм):

$$\frac{U_0}{E} = d - x + \frac{x}{\varepsilon} \quad\Longrightarrow\quad \frac{24}{4} = 12 - 8 + \frac{8}{\varepsilon} \quad\Longrightarrow\quad \frac{8}{\varepsilon} = 2 \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon = 4.$$

Обратите внимание: в вычитаемом $d - x$ стоит толщина воздушного слоя, а не толщина пластины. График $E(x)$ относится к зазору, поэтому $E$ умножается именно на $d - x$.

**4. Второй способ: цепь из двух конденсаторов.** Воздушный зазор и пластина — два плоских конденсатора с общей площадью $S$, соединённые последовательно: $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d-x}$, $C_2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{x}$. Заряд на их обкладках одинаков, потому что смещение $D$ одно и то же в обоих слоях (пункт 2), а напряжения складываются: $U_1 + U_2 = U_0$.



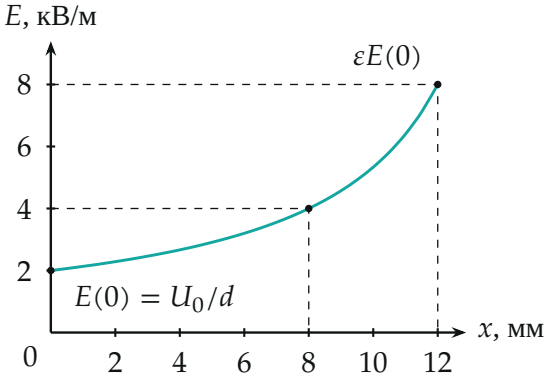

*Эквивалентная схема: два конденсатора, включённые последовательно, и источник $U_0$.*

Заряд обкладки в обоих случаях один: $C_1 U_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d-x} E(d-x) = \varepsilon_0 S E$ и $C_2 U_2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{x} \cdot \dfrac{Ex}{\varepsilon} = \varepsilon_0 S E$. Равенство выполняется тождественно, значит, схема из двух конденсаторов даёт то же уравнение $U_0 = E(d-x) + Ex/\varepsilon$.

**5. Весь график сразу.** Выразим $E$ из уравнения и подставим найденные $U_0 = 24$ В, $\varepsilon = 4$ (поле в В/мм, $x$ в мм):

$$E(x) = \frac{U_0}{d - x(1 - 1/\varepsilon)} = \frac{24}{12 - 0{,}75\,x}.$$

Кривая идёт через $(0;\,2)$ и $(8;\,4)$ по построению, а все остальные точки — проверка: при $x = 4$ мм формула даёт 2,67, при $x = 6$ мм — 3,2, и это совпадает с графиком условия. На рисунке кривая продолжена до $x = d$: зазор исчезает, а поле в нём стремится к $\varepsilon E(0) = 8$ кВ/м.

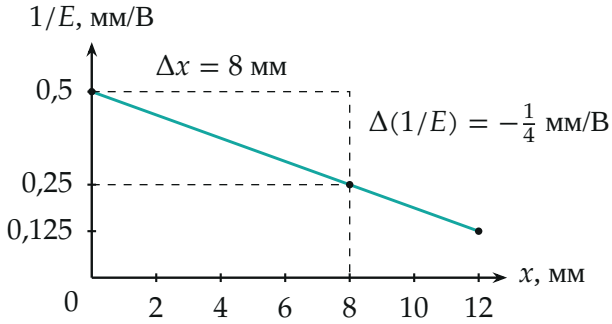



*Расчётная кривая $E(x)$ при $U_0 = 24$ В и $\varepsilon = 4$; точки $(0; 2)$ и $(8; 4)$ — данные условия, конец кривой при $x = d$ — предел $\varepsilon E(0) = 8$ кВ/м.*

**6. Второй способ: прямая вместо кривой.** Величина, обратная полю, линейна по $x$:

$$\frac{1}{E} = \frac{d - x\,(1 - 1/\varepsilon)}{U_0}.$$

Нанесём на график $1/E$ в зависимости от $x$: точки условия лежат на прямой, и её наклон по двум точкам $(0; 0{,}5)$ и $(8; 0{,}25)$ (в единицах мм/В) равен $-\dfrac{0{,}25}{8} = -\dfrac{1}{32}$ В$^{-1}$. С другой стороны, наклон равен $-\dfrac{1 - 1/\varepsilon}{U_0}$, откуда $1 - \dfrac{1}{\varepsilon} = \dfrac{24}{32} = \dfrac{3}{4}$ и $\varepsilon = 4$. Ответ тот же.




*Обратная величина $1/E$ линейна по $x$: наклон прямой определяет $1 - 1/\varepsilon$.*

**Проверка.** Размерность: $E\,d$ — В/м · м = В. Предел $\varepsilon \to 1$: в уравнении $U_0 = E(d-x)+Ex$ получаем $E = U_0/d$ при любом $x$, график был бы горизонтальной прямой — пластина не меняет поля. Наша кривая растёт, значит $\varepsilon > 1$, как и должно быть. Предел $x \to d$: зазор исчезает, а поле в нём стремится к $\varepsilon U_0/d = 8$ кВ/м, потому что вся толщина конденсатора занята диэлектриком с полем $U_0/d$. Контрольная точка $x = 6$ мм: $24/(12-4{,}5) = 3{,}2$ кВ/м, как на графике условия. Смысл: диэлектрик забирает на себя часть напряжения с малым полем ($E/\varepsilon$), остальное напряжение приходится на воздух, поэтому поле в нём растёт.

**Ответ.** 1) $U_0 = 24$ В; 2) $\varepsilon = 4$.