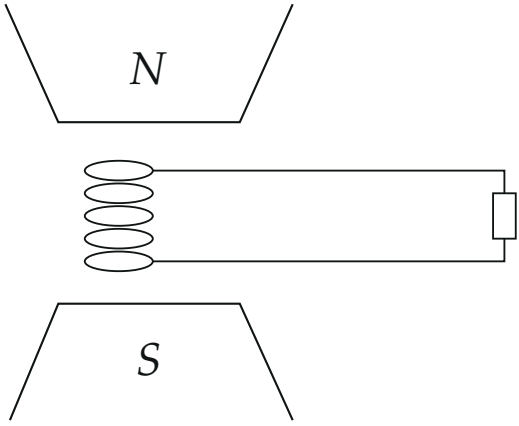
Катушка в выключаемом поле с резистором

Задача 4. [Физтех 2024/25, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 4] Катушка с числом витков n и площадью каждого витка S_1 находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией B_0. Силовые линии поля направлены перпендикулярно плоскости каждого витка (см. рис.). Концы катушки замкнуты на резистор сопротивлением R. Внешнее поле выключают в течение времени τ. За время выключения ток в катушке возрастает линейно от нуля до I_1. Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

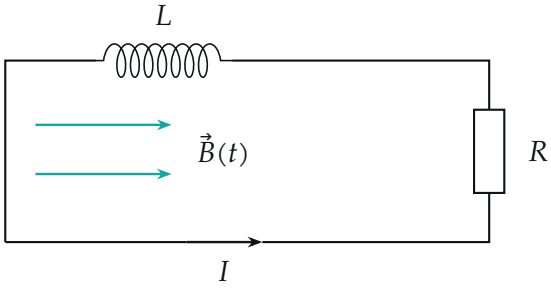
1. Найти скорость возрастания тока через время $\tau/3$ от начала выключения.
2. Найти заряд q, протекший через резистор от момента начала выключения поля до момента, когда ток через резистор станет нулевым.
3. Найти индуктивность L катушки.



▲ **Решение. Что происходит.** Внешнее поле убывает, и в катушке индуцируется ЭДС. Она создаёт ток в контуре «катушка плюс резистор», а ток, нарастая, порождает ЭДС самоиндукции катушки; напряжение на резисторе равно сумме двух ЭДС. По условию ток растёт линейно, поэтому его скорость постоянна, а ЭДС самоиндукции $-L\,dI/dt$ в течение

выключения не меняется. После момента τ поля уже нет: ток спадает до нуля, а катушка отдаёт запасённую энергию резистору. Класс задачи: индукция → ЭДС → цепь (одно уравнение контура, затем суммирование по времени).

Обозначения. $I(t)$ — ток, $B(t)$ — индукция внешнего поля, nS_1B — поток внешнего поля через все витки. Положительное направление тока выберем так, чтобы поток собственного поля тока через катушку шёл вдоль $\vec{B}$: тогда при убывании B ток получается положительным. Моменты: $t = 0$ — начало выключения, $t = \tau$ — конец; $t \to \infty$ — ток стал нулевым.



Контур: катушка в убывающем поле и резистор; ток I течёт по обоим элементам.

1. Уравнение контура. Запишем закон Ома для контура: сумма ЭДС равна падению напряжения на резисторе. ЭДС индукции внешнего поля равна $-nS_1\,dB/dt$ (закон Фарадея), ЭДС самоиндукции — $-L\,dI/dt$:

$$-nS_1\frac{dB}{dt} - L\frac{dI}{dt} = IR.$$

Это уравнение верно в любой момент, пока меняются B и I, и после τ тоже (там $B = 0$ и $dB/dt = 0$).

Пункт 1.

2. Скорость роста тока. За время выключения ток растёт линейно от 0 до I_1, значит, скорость роста тока постоянна и равна отношению

приращения к времени:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I_1 - 0}{\tau - 0} = \frac{I_1}{\tau}.$$

Она одна и та же в любой момент от 0 до τ, в том числе через $\tau/3$.

Обратите внимание: вопрос про скорость роста, а не про значение тока. В момент $\tau/3$ ток равен $I_1/3$, а скорость роста — по-прежнему I_1/τ.

Пункт 2.

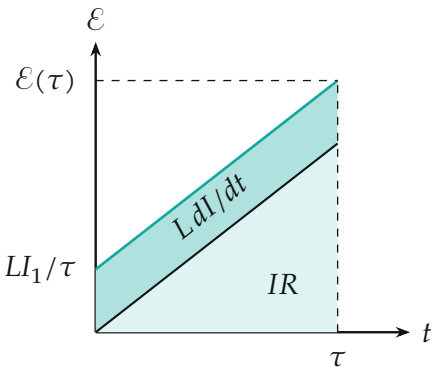
3. Суммирование по времени. Рассмотрим малый промежуток dt. За него через резистор проходит заряд $dq = I\,dt$, поэтому, умножив уравнение контура на dt, получаем связь изменений величин:

$$-nS_1\,dB - L\,dI = R\,dq.$$

Сложим такие равенства от начала выключения ($t = 0$: $B = B_0$, $I = 0$) до момента, когда ток стал нулевым ($B = 0$, $I = 0$):

$$-nS_1\,(0 - B_0) - L\,(0 - 0) = R\,q \quad \Longrightarrow \quad q = \frac{nS_1B_0}{R}.$$

Приращение тока за весь процесс равно нулю (ток был нулевым и стал нулевым), поэтому индуктивность катушки в ответ не вошла: заряд определяется только убылью потока внешнего поля, как в законе Фарадея для замкнутого контура с сопротивлением R.



Внешняя ЭДС $\mathcal{E} = -nS_1\,dB/dt$ (верхняя бирюзовая линия) разделена на две части: на самоиндукцию $L\,dI/dt = LI_1/\tau$ (постоянна) и на резистор IR (растёт линейно). Площадь под всей ЭДС равна убыли потока nS_1B_0. Числа для рисунка выбраны для наглядности.

Пункт 3.

4. Индуктивность. Применим то же суммирование к промежутку выключения $0 < t < \tau$, где B убывает от B_0 до нуля, а ток растёт от 0 до I_1:

$$-nS_1\,(0 - B_0) - L\,(I_1 - 0) = R\,q_1.$$

Здесь $q_1 = \frac{1}{2}I_1\tau$ — заряд за время выключения: ток растёт линейно, поэтому средний ток равен $\frac{1}{2}I_1$. Тогда

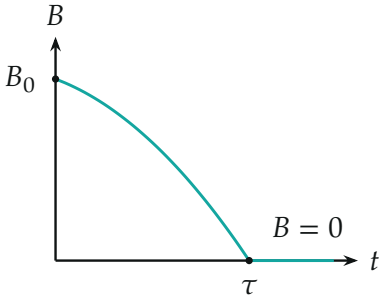
$$nS_1B_0 - LI_1 = \tfrac{1}{2}\,RI_1\tau \quad\Longrightarrow\quad L = \frac{nS_1B_0}{I_1} - \frac{R\tau}{2}.$$

Обратите внимание: средний ток $\frac{1}{2}I_1$ годится именно потому, что ток нарастает линейно (это сказано в условии). Для другой зависимости $I(t)$ пришлось бы считать площадь под её графиком.

5. Что при этом делает поле. Из уравнения контура и линейного тока $I = I_1t/\tau$ найдём $B(t)$: $-nS_1\,dB/dt = LI_1/\tau + RI_1t/\tau$. Суммируя от 0 до t,

$$B(t) = B_0 - \frac{I_1}{nS_1}\Big(\frac{L\,t}{\tau} + \frac{R\,t^2}{2\tau}\Big).$$

Поле убывает по параболе, причём всё быстрее: чтобы ток рос линейно, ЭДС должна расти вместе с IR (рисунок к шагу 3). В момент τ поле равно нулю, и это условие даёт тот же L.

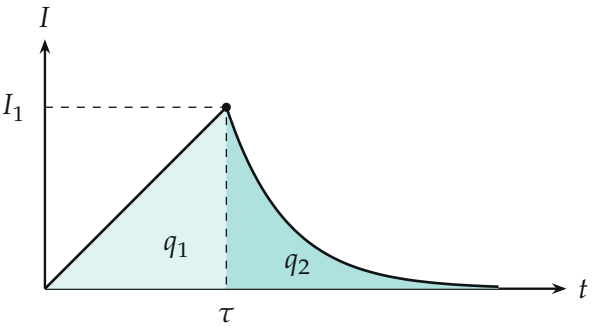


Индукция внешнего поля при линейном росте тока: убывает по параболе, затем остаётся нулевой.

6. Заряд вторым способом. Заряд после момента τ можно найти отдельно. При $t > \tau$ поля нет, уравнение даёт $-L\,dI = R\,dq$, и от тока I_1 до нуля

$$q_2 = \frac{LI_1}{R}.$$

За время выключения ток растёт линейно, и заряд равен площади треугольника под графиком тока: $q_1 = \frac{1}{2} I_1 \tau$. Сумма $q_1 + q_2 = \frac{1}{2} I_1 \tau + LI_1/R$ после подстановки L из шага 4 даёт nS_1B_0/R — тот же заряд.



Ток растёт линейно, затем спадает по экспоненте (при $t > \tau$ ток спадает с постоянной времени L/R). Заряды q_1 (треугольник) и q_2 (хвост) в сумме равны nS_1B_0/R.

Проверка. Размерность: nS_1B_0/I_1 — Вб/А = Гн, $R\tau$ — Ом·с = Гн; $q = nS_1B_0/R$ — Вб/Ом = Кл. Предел $R \to 0$: $L = nS_1B_0/I_1$, то есть

$LI_1 = nS_1B_0$ — катушка без сопротивления сохраняет поток. Условие $L > 0$ даёт $I_1 < 2nS_1B_0/(R\tau)$: при большем токе поле не успело бы дать нужную ЭДС. Смысл: заряд зависит только от убыли потока, а индуктивность определяется тем, какая часть потока ушла в самоиндукцию, а какая — в нагрев резистора.

Ответ. 1) $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{I_1}{\tau}$; 2) $q = \dfrac{nS_1B_0}{R}$; 3) $L = \dfrac{nS_1B_0}{I_1} - \dfrac{R\tau}{2}$.