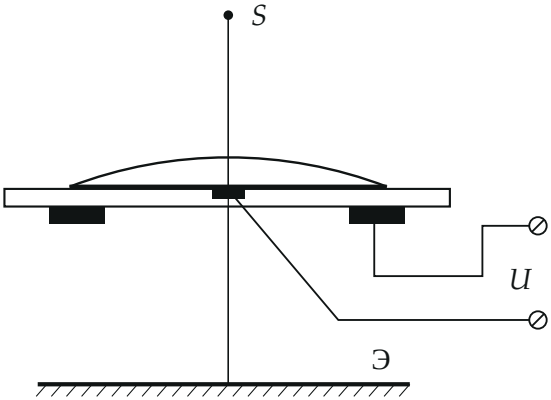
Капля жидкости как линза

Задача 5. [Физтех 2024/25, 11 класс, варианты 11-05–11-06, задача 5] Капля электропроводящей прозрачной жидкости с показателем преломления $n = 1{,}4$ покоится на тонкой смачиваемой прозрачной горизонтальной диэлектрической подложке (см. рис.). Капля используется в качестве тонкой плосковыпуклой линзы для получения изображения маленького светящегося шарика-светодиода S на экране Э. Источник S можно перемещать вдоль главной оптической оси линзы. Плоскость экрана перпендикулярна оси и находится на расстоянии $b = 6$ см от линзы. Расстояние от источника до линзы значительно больше диаметра пучка света, проходящего через линзу. Если под каплей соосно расположить два электрода, так что небольшой центральный электрод непосредственно контактирует с жидкостью, а периферийный (кольцо) изолирован от неё, то можно изменять радиус R кривизны верхней поверхности линзы по линейному закону в зависимости от напряжения U, прикладываемого к электродам. Если светодиод на высоте $a_1 = 12$ см над каплей, то изображение на экране при $U_1 = 1$ В. Если светодиод на высоте $a_2 = 18$ см, то изображение на экране при напряжении $U_2 = 2$ В.

1. Выведите формулу для фокусного расстояния F плосковыпуклой тонкой линзы в зависимости от радиуса кривизны R и показателя преломления n.
2. Определите радиус кривизны R_0 капли при нулевом напряжении.
3. Считая, что светодиод излучает одинаковую световую мощность по всем направлениям, определите отношение средних освещённостей E_1/E_2 первого и второго изображений. Поглощением света в подложке пренебречь. Освещённость — энергия света, падающего на единицу площади в единицу времени.



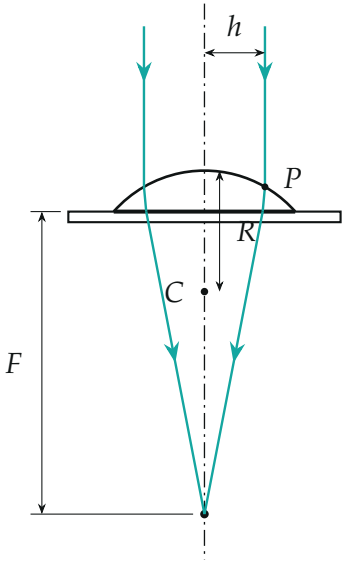
▲ **Решение. Что происходит.** Капля на подложке — плосковыпуклая линза, и от напряжения зависит только радиус кривизны её верхней поверхности: $R = R_0 + kU$ (закон линейный, k неизвестно). Три вопроса решаются по очереди. Фокусное расстояние выводим из закона преломления для малых углов. Две пары «высота источника — напряжение» при одном и том же расстоянии до экрана дают два уравнения тонкой линзы с двумя неизвестными R_0 и k. Освещённость изображения — мощность света, собранного линзой, делённая на площадь изображения; обе величины убывают как $1/a^2$, и это определяет ответ. Класс задачи: тонкая линза (формула и вывод) плюс фотометрия точечного источника.

Обозначения. a — расстояние от источника до линзы, $b = 6$ см — от линзы до экрана, R — радиус кривизны выпуклой поверхности, R_0 — его значение при $U = 0$. Падающие на каплю лучи составляют малые углы с осью (диаметр пучка много меньше a), поэтому $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$.

Пункт 1.

1. Ход луча, параллельного оси. Фокус — точка, где пересекает ось луч, пришедший параллельно оси. Пустим такой луч на высоте h над осью сверху, на выпуклую поверхность. Нормаль к ней — радиус CP

с центром кривизны C на оси, и он образует с осью угол $\varphi = h/R$, а значит, и угол падения φ (луч идёт вдоль оси).



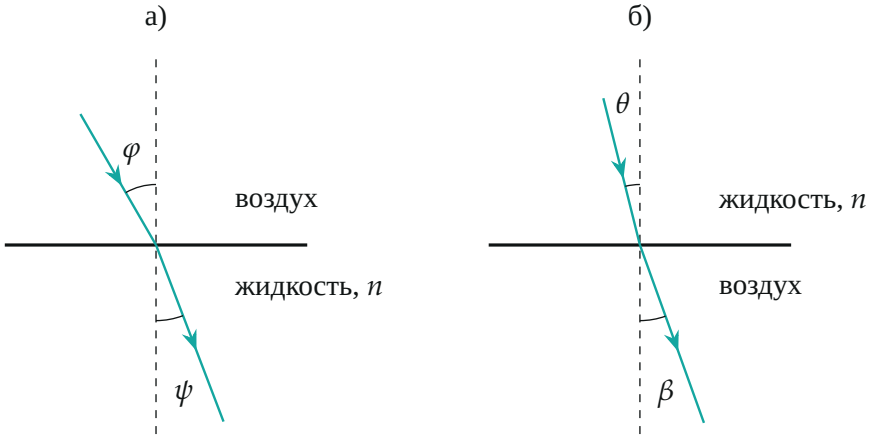
Параллельные оси лучи на высоте h собираются в фокусе F на расстоянии F от линзы; C — центр кривизны верхней поверхности, R — радиус. Углы на рисунке не в масштабе (подробнее — ниже).

2. Преломление на выпуклой поверхности. Закон преломления для малых углов: $\varphi = n\psi$, где ψ — угол преломления. Внутри линзы луч отклонился к оси и составляет с ней угол

$$\theta = \varphi - \psi = \varphi\,\frac{n-1}{n}.$$

Линза тонкая, поэтому луч доходит до плоской поверхности практически на той же высоте h.

3. Преломление на плоской поверхности. Нормаль к плоской границе — сама ось, поэтому угол падения равен θ. Выходя в воздух, луч преломляется: $\beta = n\theta = \varphi\,(n-1)$ — угол выходящего луча с осью. Он пересекает ось на расстоянии F от линзы: $F = h/\beta$.



Ход луча вблизи двух поверхностей (углы увеличены): а) на выпуклой поверхности $\varphi = n\psi$; б) на плоской $\beta = n\theta$. Углы отсчитываются от нормалей.

4. Фокусное расстояние. Подставим $\varphi = h/R$:

$$F = \frac{h}{\beta} = \frac{h}{(n-1)\,h/R} = \frac{R}{n-1}, \qquad \frac{1}{F} = \frac{n-1}{R}.$$

Высота h сократилась: все приосевые лучи собираются в одной точке.

Второй способ — пустить луч на плоскую поверхность в обратную сторону (по обратимости фокусное расстояние то же): луч входит перпендикулярно границе, не преломляясь, и на выпуклую поверхность падает изнутри с углом $\alpha = h/R$, а выходит под углом $\beta = n\alpha$; тогда $R\alpha = F(\beta - \alpha)$ и $F = R/(n-1)$. Ответ тот же.

Пункт 2.

5. Уравнение линзы для двух опытов. В обоих опытах на экране резкое изображение, расстояние до экрана одно, $b = 6$ см. Формула тонкой

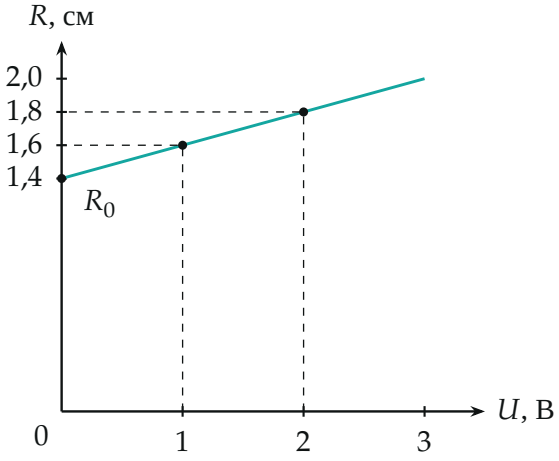
линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}=\frac{n-1}{R}$ даёт радиус кривизны по каждому опыту:

$$R(U_1)=\frac{n-1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b}}=\frac{0{,}4}{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}}\text{ см}=1{,}6\text{ см},$$

$$R(U_2)=\frac{n-1}{\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b}}=\frac{0{,}4}{\frac{1}{18}+\frac{1}{6}}\text{ см}=1{,}8\text{ см}.$$

Здесь $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{18}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$ (в см^{-1}).

6. Линейный закон. Радиус зависит от напряжения линейно: $R=R_0+kU$. По двум опытам: $R_0+k\cdot 1\text{ В}=1{,}6$ см, $R_0+k\cdot 2\text{ В}=1{,}8$ см. Вычтем первое из второго: $k=0{,}2$ см/В. Тогда $R_0=1{,}6\text{ см}-0{,}2\text{ см}=1{,}4$ см — значение прямой при $U=0$.



Радиус кривизны капли как функция напряжения: прямая через точки (1 В; 1,6 см) и (2 В; 1,8 см) пересекает ось R в точке $R_0=1{,}4$ см.

Обратите внимание: радиус нужно искать по тому, какое a соответствует какому U. Радиус в первом опыте не равен R_0: напряжение там уже 1 В.

Пункт 3.

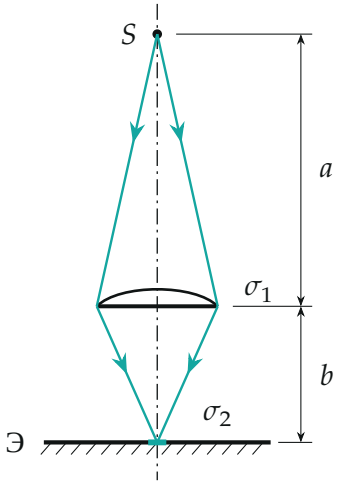
7. Мощность, собранная линзой. Источник излучает мощность W_0 одинаково по всем направлениям, поэтому на расстоянии a она распределена по сфере площадью $4\pi a^2$, и на единицу площади приходится $W_0/(4\pi a^2)$. Линза занимает малую часть сферы (диаметр пучка много меньше a), и в неё входит мощность

$$W = \frac{W_0}{4\pi a^2}\,\sigma_1,$$

где σ_1 — площадь линзы (площадь основания капли). Условие не задаёт зависимость диаметра капли от напряжения, и ответ организаторов получен в допущении, что основание капли в обоих опытах одно и то же (край капли закреплён на подложке). Это допущение, а не следствие условия: оно обсуждается в конце пункта.

8. Площадь изображения. Источник — маленький шарик с площадью поперечного сечения σ_0. Линейное увеличение линзы равно b/a, а площадь изображения — квадрату увеличения, умноженному на σ_0:

$$\sigma_2 = \sigma_0\left(\frac{b}{a}\right)^2.$$



Свет источника S, попавший на линзу площадью σ_1, собирается в изображение площадью σ_2 на экране Э; a и b — расстояния от линзы до источника

и до экрана.

9. Освещённость. Вся собранная мощность падает на изображение (подложка свет не поглощает), поэтому средняя освещённость

$$E = \frac{W}{\sigma_2} = \frac{W_0\,\sigma_1}{4\pi a^2}\cdot\frac{a^2}{\sigma_0\,b^2} = \frac{W_0}{4\pi b^2}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_0}.$$

Расстояние a сократилось: освещённость определяется мощностью источника, площадью линзы, площадью источника и расстоянием до экрана, а все они в двух опытах одинаковы (b не менялось). Поэтому

$$\frac{E_1}{E_2} = 1.$$

Обратите внимание: радиусы кривизны в двух опытах разные (1,6 и 1,8 см), но на освещённость это не влияет: она зависит от радиуса только через площадь линзы σ_1, а её мы считаем неизменной.

Насколько это допущение строгое. Объём капли при смене напряжения сохраняется. Для тонкой капли с радиусом основания r и радиусом кривизны R высота $h \approx r^2/(2R)$, объём $V \approx \frac{1}{2}\pi r^2 h = \pi r^4/(4R)$. Если край капли свободно скользит по подложке, то при $V = \text{const}$ площадь основания $\sigma_1 = \pi r^2 = 2\sqrt{\pi V R}$ растёт как $\sqrt{R}$, и тогда $E_1/E_2 = \sqrt{R_1/R_2} = \sqrt{1{,}6/1{,}8} \approx 0{,}94$. Если же край закреплён, то σ_1 неизменна, а меняющийся при этом объём означал бы, что капля обменивается жидкостью с окружением, чего в условии нет. Значит, строго говоря, площадь основания немного меняется; ответ $E_1/E_2 = 1$ — ответ организаторов в их допущении $\sigma_1 = \text{const}$, отличие от оценки с сохранением объёма около 6 %.

Проверка. Размерность: $F = R/(n-1)$ — длина, k — см/В, $W_0/(4\pi b^2)$ — Вт/м^2, σ_1/σ_0 безразмерно. Предел $n \to 1$: $F \to \infty$ — жидкость с показателем воздуха не фокусирует. Для найденных R_0 и k фокусные расстояния $F = R/0{,}4$ равны 4 см при $U = 1$ В и 4,5 см при $U = 2$ В, оба меньше $b = 6$ см, поэтому изображения действительные, как в условии. Второй способ для освещённости: при увеличении a в 1,5 раза и мощность, и площадь изображения уменьшаются в 2,25 раза,

отношение прежнее. Смысл: пока линза подбирается под расстояние до экрана, яркость изображения от высоты источника не зависит.

Ответ. 1) $F = \dfrac{R}{n-1}$; 2) $R_0 = 1{,}4$ см; 3) $\dfrac{E_1}{E_2} = 1$.