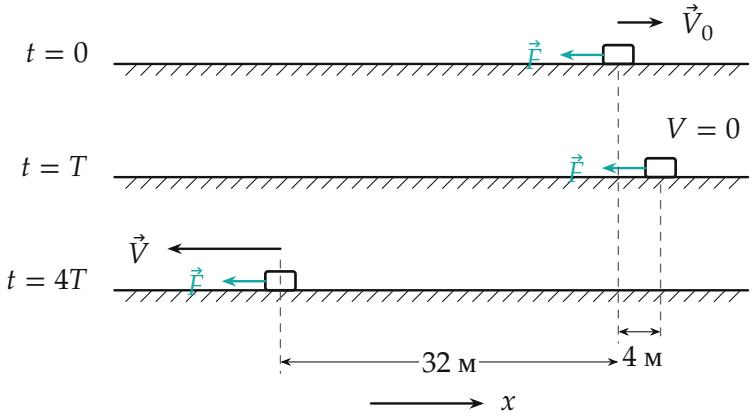
Шайба со скоростью $V_0(1 - t/T)$

Задача 1. [Физтех 2024/25, 9 класс, варианты 09-01–09-02, задача 1] Шайба массой $m = 0{,}2$ кг движется поступательно по гладкой горизонтальной плоскости. Скорость шайбы изменяется со временем по закону $\vec{V}(t) = \vec{V}_0\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)$, здесь $\vec{V}_0$ — вектор начальной скорости, модуль начальной скорости $V_0 = 4$ м/с, постоянная $T = 2$ с.

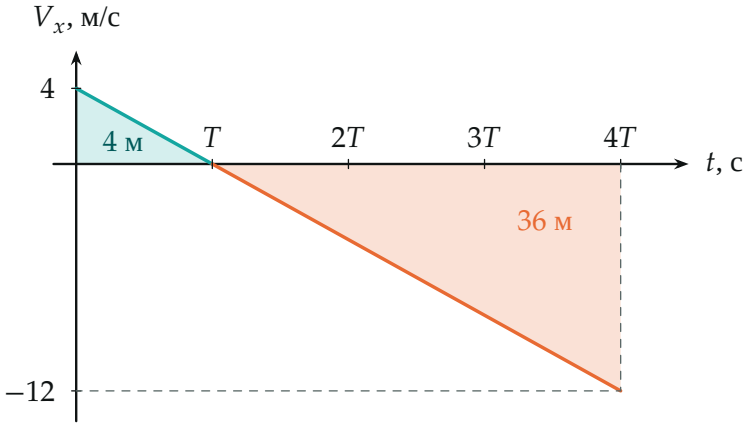
1. Найдите путь S, пройденный шайбой за время от $t = 0$ до $t = 4T$.
2. Найдите модуль F горизонтальной силы, действующей на шайбу.
3. Найдите работу A силы F за время от $t = 0$ до $t = T$.



Шайба в три момента (масштаб условный). Сила $\vec{F}$ всё время направлена против $\vec{V}_0$: шайба тормозится, останавливается в точке 4 м от старта и едет назад.

▲ **Решение. Что происходит.** Скорость $\vec{V}(t) = \vec{V}_0(1 - t/T)$ — линейная функция времени, поэтому ускорение постоянно, а значит, постоянна и сила. В момент $t = T$ множитель $1 - t/T$ обращается в нуль: шайба на мгновение останавливается. Закон не меняется, множитель идёт дальше в отрицательные значения, и шайба разворачивается и разгоняется в обратную сторону. Задача на путь при движении с остановкой и разворотом: путь считают отдельно до остановки и после неё, иначе вычитание сотрёт часть пройденного.

Обозначения. Ось x направим вдоль $\vec{V}_0$ — тогда $V_x = V_0(1 - t/T)$ положительна до остановки и отрицательна после. Нуль оси — начальное положение шайбы.



Проекция скорости на ось x. Бирюзовая площадь — путь до остановки, морковная — путь после неё (под осью времени, но это тоже путь).

Пункт 1.

1. Путь до остановки. До момента T шайба едет в одну сторону, путь равен площади под графиком скорости — треугольника с катетами T и V_0:

$$S_1 = \frac{1}{2}V_0T = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ м}.$$

Применимо, пока скорость не меняет знак: здесь это от 0 до T.

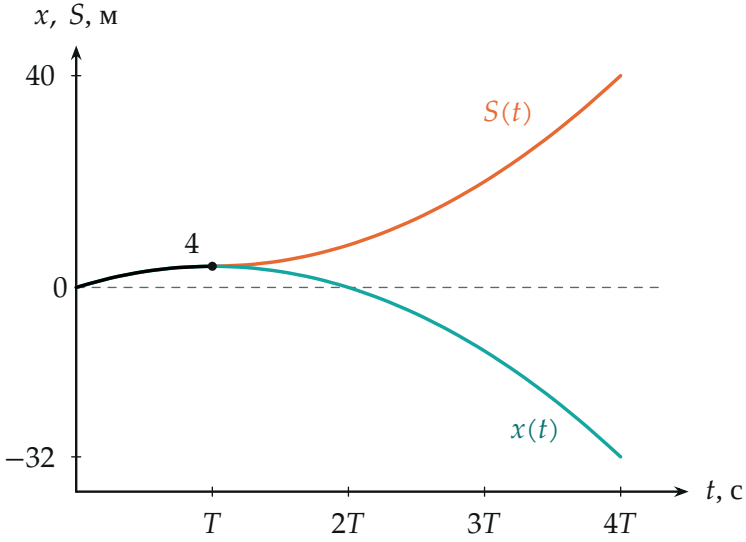
2. Путь после остановки. Ускорение по модулю $a = V_0/T = 2$ м/с^2 (см. пункт 2), оно не изменилось. За время от T до $4T$, то есть за $3T$, скорость вырастает по модулю от нуля до $3V_0 = 12$ м/с. Путь — снова площадь треугольника, катеты $3T$ и $3V_0$:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 3T \cdot 3V_0 = \frac{9}{2}V_0T = 36 \text{ м}.$$

Это путь, а не перемещение: шайба идёт назад, и её координата убывает. Модуль скорости на этом участке растёт, значит, ни разу не меняет направление, и сумма площадей даёт путь.

3. Путь. Складываем: $S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}V_0T + \frac{9}{2}V_0T = 5V_0T = 40$ м.

Обратите внимание: перемещение шайбы за это время другое. Координата в конце $x(4T) = V_0 \cdot 4T - \frac{V_0}{2T}(4T)^2 = -4V_0T = -32$ м: шайба оказалась на 32 м *позади* старта, хотя прошла 40 м.



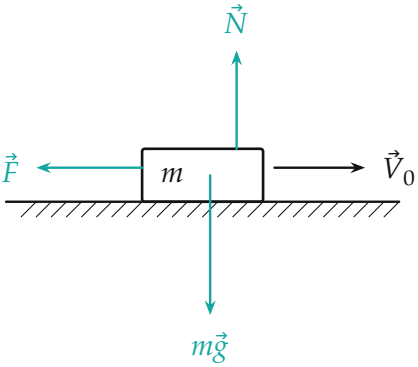
Координата $x(t)$ (бирюза) и путь $S(t)$ (морковный): до T кривые совпадают, после T координата убывает, а путь продолжает расти.

Пункт 2.

4. Ускорение. Ускорение — изменение скорости за единицу времени. Закон скорости линеен, поэтому за любой промежуток Δt скорость меняется на $\Delta\vec{V} = -\vec{V}_0\,\Delta t/T$, и

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = -\frac{\vec{V}_0}{T}, \qquad a = \frac{V_0}{T} = 2\ \text{м/с}^2.$$

Ускорение не зависит от времени и направлено против $\vec{V}_0$.



Шайба сбоку: сила тяжести и реакция опоры уравновешены, остаётся одна горизонтальная сила $\vec{F}$.

5. Второй закон Ньютона для шайбы. Плоскость гладкая, значит, трения нет. По вертикали шайба не движется, поэтому $\vec{N}$ и $m\vec{g}$ уравновешивают друг друга (в проекции на вертикаль $N - mg = 0$). По горизонтали действует только $\vec{F}$:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad F = ma = \frac{mV_0}{T} = 0{,}2 \cdot \frac{4}{2} = 0{,}4 \text{ Н}.$$

В проекции на ось x: $F_x = -0{,}4$ Н. Знак минус: сила направлена против $\vec{V}_0$.

Пункт 3.

6. Работа. Работа постоянной силы — произведение проекции силы на перемещение: $A = F_x \Delta x$. От 0 до T шайба смещается вдоль оси на $S_1 = 4$ м (разворота ещё не было, перемещение равно пути):

$$A = F_x \Delta x = -0{,}4 \cdot 4 = -1{,}6 \text{ Дж}.$$

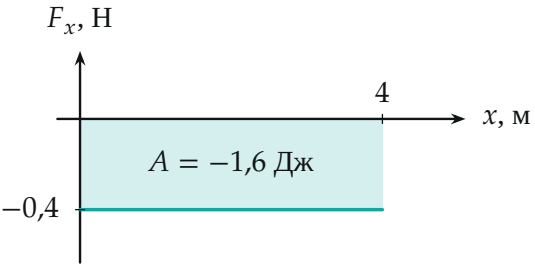
Знак словами: сила направлена против движения, шайба теряет энергию.

7. Второй способ — теорема о кинетической энергии. Работа единственной силы, совершающей работу (силы $\vec{N}$ и $m\vec{g}$ перпендикулярны перемещению), равна изменению кинетической энергии шайбы. В мо-

мент T шайба стоит:

$$A = \frac{mV^2(T)}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = 0 - \frac{0{,}2 \cdot 16}{2} = -1{,}6 \text{ Дж}.$$

Способы совпали.



Работа постоянной силы — площадь прямоугольника под графиком $F_x(x)$; ниже оси — отрицательная.

Обратите внимание: до T работа отрицательна, а за всё время $0 \dots 4T$ она положительна: перемещение за это время -32 м и сила направлены в одну сторону, $A = (-0{,}4)(-32) = 12{,}8$ Дж, что равно изменению кинетической энергии $\frac{1}{2}m(12^2) - \frac{1}{2}mV_0^2 = 12{,}8$ Дж.

Проверка. Размерность: mV_0/T — кг·м/с делить на с, то есть Н; $mV_0^2/2$ — Дж. Второй способ для пути: за три равных промежутка T после остановки пути относятся как $1 : 3 : 5$, значит $S_2 = \frac{V_0 T}{2}(1+3+5) = \frac{9}{2}V_0 T$, $S = \frac{V_0 T}{2}(1+1+3+5) = 5V_0 T = 40$ м. Смысл: постоянная сила тормозит шайбу, останавливает и разгоняет назад, а путь в таком движении считают по модулю скорости.

Ответ. 1) $S = 5V_0 T = 40$ м; 2) $F = \frac{mV_0}{T} = 0{,}4$ Н; 3) $A = -\frac{mV_0^2}{2} = -1{,}6$ Дж.