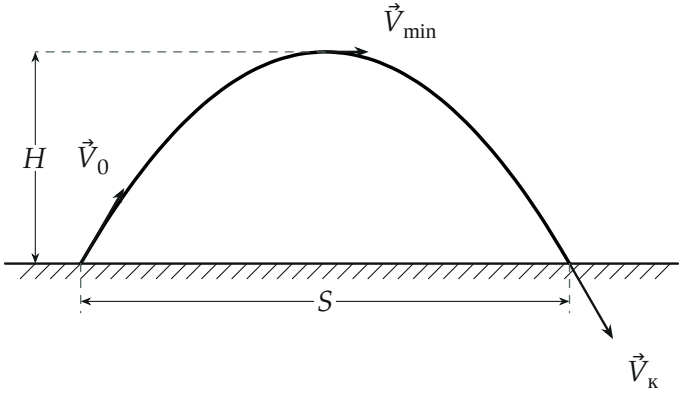
# Удар футболиста по мячу

**Задача 2.** [Физтех 2024/25, 9 класс, варианты 09-01–09-02, задача 2] Футболист наносит удар по мячу, лежащему на горизонтальной площадке. Через $T = 4$ с мяч падает на площадку. Известно, что отношение максимальной и минимальной скоростей мяча в процессе полёта $\frac{V_{MAX}}{V_{MIN}} = n = 2$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

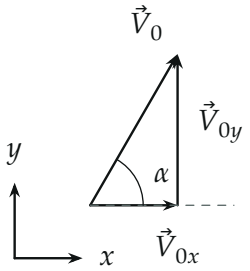
1. Найдите максимальную высоту $H$ полёта.
2. Найдите горизонтальную дальность $S$ полёта.
3. Найдите радиус $R$ кривизны начального участка траектории.




*Траектория мяча в масштабе (по найденным ниже данным). $\vec{V}_0$ — скорость сразу после удара, $\vec{V}_{\min}$ — в верхней точке, $\vec{V}_к$ — при падении.*

▲ **Решение. Что происходит.** Мяч летит только под действием силы тяжести: ускорение $\vec{g}$ постоянно и направлено вниз. По горизонтали скорость не меняется, по вертикали мяч замедляется до нуля и падает обратно. Траектория — парабола, симметричная относительно верхней точки. Задача на бросок под углом к горизонту, где неизвестный угол находят по отношению наибольшей и наименьшей скоростей.

**Обозначения.** Ось $x$ — по горизонтали в сторону полёта, ось $y$ — вертикально вверх, начало — точка удара. $V_0$ — начальная скорость, $\alpha$ — её угол с горизонтом, $V_{0x} = V_0 \cos\alpha$, $V_{0y} = V_0 \sin\alpha$ — её проекции.




*Начальная скорость и её проекции. Прямоугольный треугольник скоростей:* $V_{0y} = V_0 \sin\alpha$, $V_{0x} = V_0 \cos\alpha$.

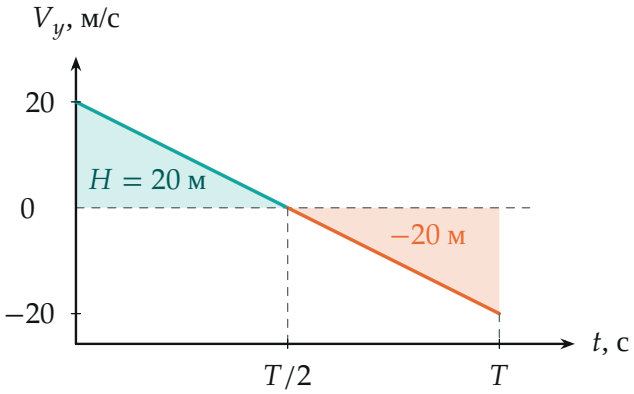
**Пункт 1.**

**1. Время подъёма.** Парабола симметрична относительно вершины: подъём и спуск длятся по $T/2 = 2$ с, в вершине $V_y = 0$.

**2. Высота.** Движение от вершины вниз — падение с нулевой начальной вертикальной скоростью за время $T/2$:

$$H = \frac{g(T/2)^2}{2} = \frac{gT^2}{8} = \frac{10 \cdot 16}{8} = 20 \text{ м}.$$

**3. Вертикальная составляющая начальной скорости.** За время подъёма $T/2$ вертикальная скорость упала от $V_{0y}$ до нуля с ускорением $g$: $V_{0y} = g\,T/2 = 20$ м/с.

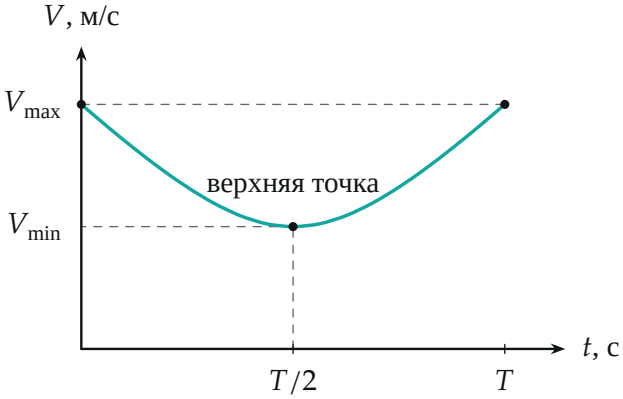



*Проекция скорости на вертикаль. Площадь над осью времени — подъём на $H = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 = 20$ м (второй способ для пункта 1), под осью — спуск: перемещение за всё время равно нулю, мяч вернулся на землю.*

**4. Откуда угол.** Скорость мяча — гипотенуза треугольника из горизонтальной и вертикальной составляющих: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$. Горизонтальная составляющая $V_x = V_{0x}$ в полёте не меняется. Вертикальная по модулю наибольшая сразу после удара (и перед падением), в верхней точке она равна нулю. Значит, $V_{MAX} = V_0$ (в начале и в конце полёта), а $V_{MIN} = V_{0x} = V_0 \cos\alpha$ (в верхней точке мяч движется горизонтально). Отношение

$$n = \frac{V_{MAX}}{V_{MIN}} = \frac{V_0}{V_0 \cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60°.$$

Отсюда $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{n^2-1} = \sqrt{3}$.




*Модуль скорости мяча $V(t) = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$: максимален в начале и в конце полёта, минимален в верхней точке (там $V = V_{0x}$ и $V_{\min} = V_{\max}/2$).*

**Пункт 2.**

**5. Горизонтальная скорость.** Из треугольника скоростей $V_{0x} = \dfrac{V_{0y}}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{gT}{2\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{20}{\sqrt{3}} \approx 11{,}5$ м/с.

**6. Дальность.** По горизонтали мяч движется равномерно в течение всего времени полёта $T$:

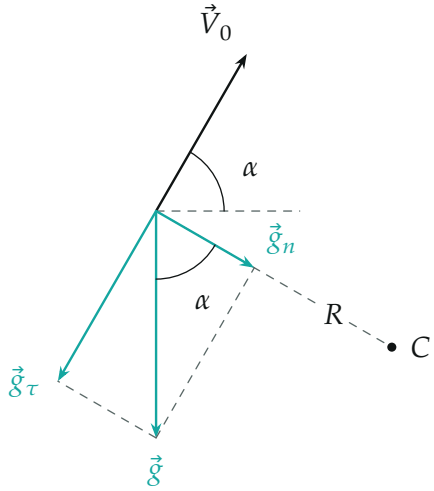
$$S = V_{0x}T = \frac{gT^2}{2\sqrt{n^2-1}} = \frac{10\cdot 16}{2\sqrt{3}} \approx 46 \text{ м}.$$

**Пункт 3.**

**7. Что такое радиус кривизны.** Малый участок траектории заменяем дугой окружности; её радиус $R$ — радиус кривизны. Путь искривляет нормальная (перпендикулярная скорости) составляющая ускорения: $a_n = V^2/R$.

**8. Нормальное ускорение в начале.** В начале полёта скорость $\vec{V}_0$ направлена под углом $\alpha$ к горизонту, а ускорение $\vec{g}$ — вниз. Разложим $\vec{g}$ вдоль скорости и по нормали к ней. Угол между вертикалью (направлением $\vec{g}$) и нормалью к скорости равен $\alpha$ (две пары взаимно перпендикулярных сторон: скорость $\perp$ нормаль, горизонталь $\perp$ вертикаль), поэтому

$$a_n = g\cos\alpha = \frac{g}{n} = 5 \text{ м/с}^2, \qquad a_\tau = g\sin\alpha.$$




*В точке удара: ускорение $\vec{g}$ раскладывается на $\vec{g}_\tau$ (вдоль скорости, назад) и $\vec{g}_n$ (по нормали, к центру C кривизны). Радиус R условно сокращён.*

**9. Начальная скорость.** $V_0 = \dfrac{V_{0y}}{\sin\alpha} = \dfrac{gT}{2}\cdot\dfrac{n}{\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{40}{\sqrt{3}} \approx 23$ м/с, $V_0^2 = 1600/3$ м$^2$/с$^2$.

**10. Радиус.** Из $a_n = V_0^2/R$:

$$R = \frac{V_0^2}{a_n} = \frac{V_0^2}{g\cos\alpha} = \frac{1600/3}{5} = \frac{320}{3} \approx 107 \text{ м}.$$

В общем виде $R = \dfrac{n^3 g T^2}{4(n^2-1)}$.

**Проверка.** Размерность: $gT^2$ — м/с$^2$·с$^2$, то есть метры; $n$ безразмерно. Предел $n \to \infty$ ($\cos\alpha \to 0$, бросок почти вертикально вверх): $S \to 0$, а $R \to \infty$: траектория — вертикальная прямая. Второй способ для $R$: в верхней точке $a_n = g$, $V = V_{0x}$, поэтому $R_{\text{верх}} = V_{0x}^2/g = 13{,}3$ м; отношение $R_{\text{нач}}/R_{\text{верх}} = 1/\cos^3\alpha = 8$ согласуется с $107/13{,}3$.

**Ответ.** 1) $H = gT^2/8 = 20$ м; 2) $S = gT^2/(2\sqrt{n^2-1}) \approx 46$ м; 3) $R = n^3 gT^2/(4(n^2-1)) \approx 107$ м.