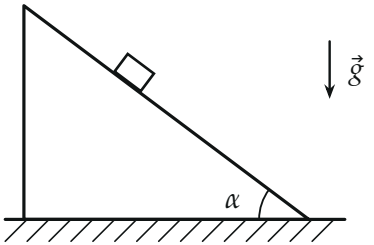
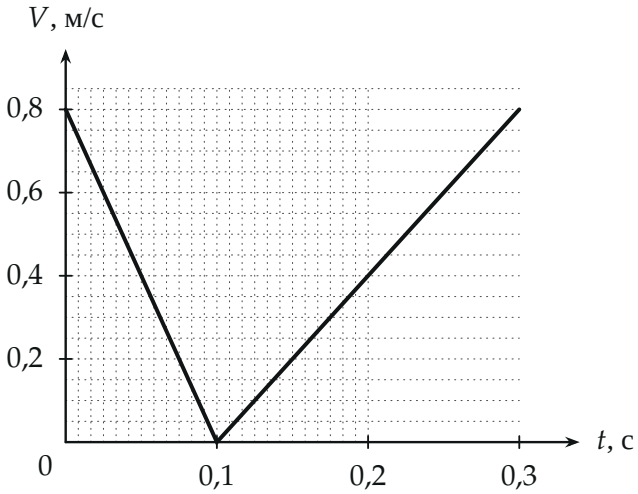
Шайба на покоящемся клине

Задача 3. [Физтех 2024/25, 9 класс, варианты 09-01–09-02, задача 3] На шероховатой горизонтальной плоскости стоит клин. Шайбу кладут на шероховатую наклонную плоскость клина и сообщают шайбе начальную скорость. Шайба движется по покоящемуся клину. Часть зависимости модуля скорости шайбы от времени представлена на графике к задаче. Поступательное движение шайбы до и после остановки происходит по одной и той же прямой. Масса шайбы $m = 0{,}2$ кг, масса клина $2m$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.





Рисунки условия: клин с шайбой и график $V(t)$ (угол клина — по числу $\sin\alpha = 0{,}6$*).*

1. Найдите $\sin\alpha$, здесь α — угол, который наклонная плоскость клина образует с горизонтом.
2. Найдите модуль $F_{\text{ТР}}$ наибольшей силы трения, с которой горизонтальная плоскость действует на клин в процессе движения шайбы по клину при $0 < t < 0{,}3$ с.
3. При каких значениях коэффициента μ трения скольжения клина по горизонтальной плоскости клин будет находиться в покое при $0 < t < 0{,}3$ с?

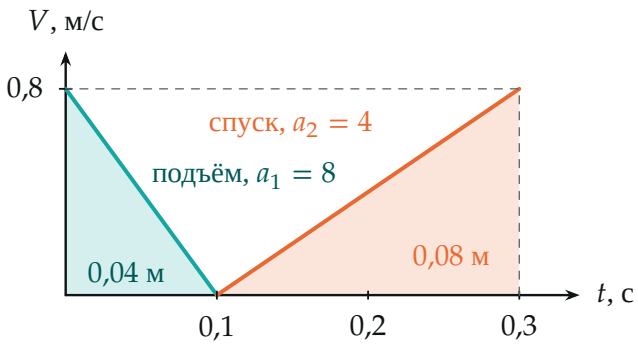
▲ **Решение. Что происходит.** Шайба едет вверх, на 0,1 с останавливается и едет вниз; трение о клин меняет направление, поэтому ускорения разные. По двум ускорениям найдём угол, затем запишем второй закон Ньютона для системы «шайба + клин»: силы между ними сократятся, останется трение пола. Задача на наклонную плоскость с трением и покой системы.

Обозначения. a_1, a_2 — модули ускорения шайбы при подъёме и спуске, N_1 — реакция клина на шайбу, $\mu_{\text{ш}}$ — коэффициент трения шайбы о клин, N и $F_{\text{ТР}}$ — реакция и сила трения пола на клин.

Пункт 1.

1. Ускорения по графику. Наклон графика модуля скорости — модуль ускорения. При подъёме скорость падает с 0,8 до 0 за 0,1 с, при спуске растёт от 0 до 0,8 м/с за 0,2 с:

$$a_1 = \frac{0{,}8}{0{,}1} = 8\ \text{м/с}^2, \qquad a_2 = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4\ \text{м/с}^2.$$



Наклоны участков — a_1 и a_2, площади — пути: вверх 0,04 м, вниз 0,08 м.

2. Шайба при подъёме. Силы: $m\vec{g}$, реакция $\vec{N}_1$ по нормали, трение $\vec{F}$ против скорости — вниз по склону. Ось x — вдоль склона вниз, y — по нормали: ускорение (шайба тормозится) лежит на оси x. Второй закон Ньютона для шайбы:

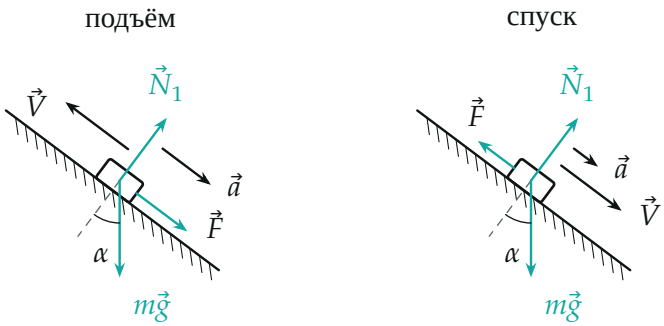
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}.$$

На y: $N_1 = mg\cos\alpha$; на x ($F = \mu_ш N_1$):

$$ma_1 = mg\sin\alpha + \mu_ш mg\cos\alpha \;\Rightarrow\; a_1 = g(\sin\alpha + \mu_ш\cos\alpha).$$

3. Шайба при спуске. Ускорение снова вниз по склону, трение — вверх:

$$ma_2 = mg\sin\alpha - \mu_ш mg\cos\alpha \;\Rightarrow\; a_2 = g(\sin\alpha - \mu_ш\cos\alpha).$$



Силы на шайбу при подъёме и спуске; $\vec{a}$ в обоих случаях вниз по склону.

4. Угол. Сложим уравнения: коэффициент трения $\mu_ш$ сократится.

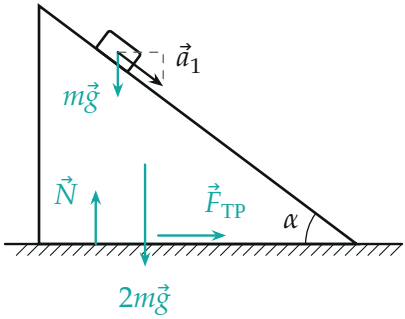
$$a_1 + a_2 = 2g\sin\alpha \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2g} = \frac{12}{20} = 0{,}6, \qquad \cos\alpha = 0{,}8.$$

Угол острый, поэтому косинус положителен. Заодно $\mu_ш = \dfrac{a_1 - a_2}{2g\cos\alpha} = 0{,}25$.

Пункт 2.

5. Система «шайба + клин». Второй закон Ньютона для системы: сумма $m_i\vec{a}_i$ равна сумме внешних сил (внутренние сокращаются по третьему закону). Клин покоится. Внешние силы — $m\vec{g}$, $2m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{TP}}$:

$$m\vec{a} + 2m \cdot \vec{0} = m\vec{g} + 2m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{TP}}.$$



Внешние силы на систему «шайба + клин» при подъёме; у шайбы — $\vec{a}_1$ и его проекции (пунктир), клин неподвижен.

6. Горизонтальная проекция. Ось X — горизонтально в сторону спуска. Проекция ускорения шайбы $a\cos\alpha$, тяжесть и N вертикальны: $ma\cos\alpha = F_{\text{TP}}$. Знак плюс: трение пола направлено в сторону спуска. Обратите внимание: давление и трение шайбы о клин — внутренние силы системы, в это уравнение они не входят. Сила наибольшая при большем ускорении — при подъёме ($0 < t < 0{,}1$ с):

$$F_{\text{TP}} = ma_1\cos\alpha = 0{,}2 \cdot 8 \cdot 0{,}8 = 1{,}28 \text{ Н}.$$

При спуске было бы $0{,}2 \cdot 4 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$ Н.

Пункт 3.

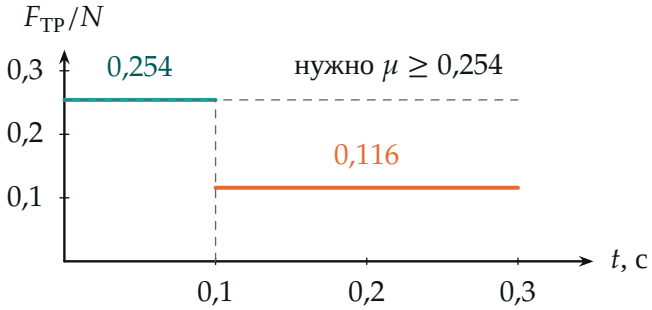
7. Вертикальная проекция. Вертикальная проекция ускорения шайбы $-a\sin\alpha$: $-ma\sin\alpha = N - 3mg$, $N = 3mg - ma\sin\alpha$. При подъёме $N_{(1)} = 3{\cdot}0{,}2{\cdot}10 - 0{,}2{\cdot}8{\cdot}0{,}6 = 5{,}04$ Н, при спуске $N_{(2)} = 6 - 0{,}2{\cdot}4{\cdot}0{,}6 = 5{,}52$ Н. Обе меньше $3mg = 6$ Н: у шайбы есть ускорение вниз.

8. Условие покоя. Трение покоя не больше μN, значит, $\mu \geq F_{\text{TP}}/N$ в

каждый момент: Подъём:

$$\frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{ma_1 \cos\alpha}{3mg - ma_1 \sin\alpha} = \frac{a_1 \cos\alpha}{3g - a_1 \sin\alpha} = \frac{1{,}28}{5{,}04} \approx 0{,}254,$$

спуск: $0{,}64/5{,}52 \approx 0{,}116$. Строже — подъём: $\mu \geq 0{,}254 \approx 0{,}25$.



Какое μ нужно, чтобы клин не сдвинулся: бирюзовый участок — подъём, морковный — спуск. Условие покоя на всём отрезке выполнено, если μ не меньше наибольшего значения.

9. Второй способ для $F_{\text{тр}}$ — силы на клин. Сумма сил на покоящийся клин равна нулю. Шайба давит на него с силой $N_1 = mg\cos\alpha = 1{,}6$ Н (по горизонтали $N_1 \sin\alpha = 0{,}96$ Н против X) и трётся силой $\mu_{\text{ш}} N_1 = 0{,}4$ Н вверх по склону (по горизонтали 0,32 Н против X). Пол уравновешивает $0{,}96 + 0{,}32 = 1{,}28$ Н — как в п. 6. По вертикали $N = 2mg + N_1 \cos\alpha - 0{,}4\sin\alpha = 4 + 1{,}28 - 0{,}24 = 5{,}04$ Н — как в п. 7.

Проверка. Размерность: $a\cos\alpha$ — м/с^2, умножить на кг — Н; F/N безразмерно. Предел $\mu_{\text{ш}} \to 0$ (гладкий клин): $a = g\sin\alpha = 6$ м/с^2 при подъёме и спуске, нужно $\mu \geq \dfrac{g\sin\alpha\cos\alpha}{3g - g\sin^2\alpha} \approx 0{,}18$. С трением при подъёме нужно больше: ускорение шайбы больше. Смысл: трение пола создаёт горизонтальную часть ma шайбы.

Ответ. 1) $\sin\alpha = (a_1 + a_2)/(2g) = 0{,}6$; 2) $F_{\text{тр}} = ma_1\cos\alpha = 1{,}28$ Н; 3) $\mu \geq a_1\cos\alpha/(3g - a_1\sin\alpha) \approx 0{,}25$ (точнее 0,254).