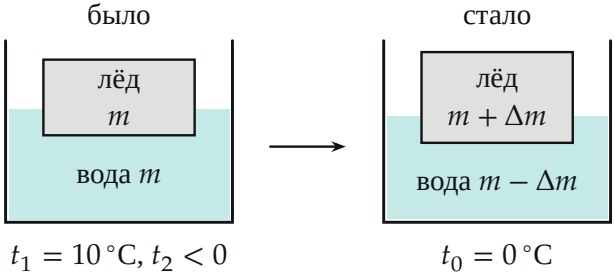
Лёд в калориметре с водой

Задача 5. [Физтех 2024/25, 9 класс, варианты 09-01–09-02, задача 5] В калориметр, содержащий воду при температуре $t_1 = 10\,^\circ\text{C}$, помещают лёд. Масса льда равна массе воды. После установления теплового равновесия отношение массы льда к массе воды $n = \dfrac{9}{7}$.

1. Найдите долю δ массы воды, превратившейся в лёд.
2. Найдите начальную температуру t_2 льда.

В теплообмене участвуют только лёд и вода. Удельная теплоёмкость льда $c_\text{Л} = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · °C), удельная теплоёмкость воды $c_\text{В} = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}36 \cdot 10^5$ Дж/кг, температура плавления льда $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$.



Поясняющий рисунок: калориметр до и после. Льда стало больше, воды — меньше, температура смеси — t_0.

▲ **Решение. Что происходит.** Вода тёплая (10 °C), лёд холодный (ниже 0 °C), поэтому тепло идёт от воды ко льду: вода остывает, лёд нагревается. Лёд нагреется до 0 °C, а воды хватит лишь на часть этого тепла; недостающее отдаст вода, замерзая при 0 °C. Именно поэтому льда становится больше: по условию его масса в конце в $\dfrac{9}{7}$ раза больше массы воды, хотя вначале масс было поровну. Главный закон — уравнение теплового баланса: теплота, отданная водой, равна теплоте, полученной льдом (энергия не уходит из калориметра). Класс задачи: тепловой баланс с фазовым переходом — сначала предположение о конечной температуре, затем проверка.

Обозначения. m — начальная масса воды и льда (они равны), Δm — масса воды, превратившейся в лёд. В конце лёд имеет массу $m + \Delta m$, вода — $m - \Delta m$. $\delta = \Delta m/m$.

Пункт 1.

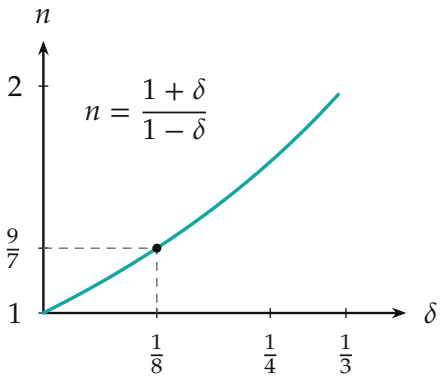
1. Отношение масс в конце. По определению n в конце

$$n = \frac{m + \Delta m}{m - \Delta m} = \frac{1 + \delta}{1 - \delta}.$$

Умножим на $1-\delta$ и соберём слагаемые: $n - n\delta = 1 + \delta$, откуда $\delta(1+n) = n - 1$:

$$\delta = \frac{n-1}{n+1} = \frac{9/7 - 1}{9/7 + 1} = \frac{2/7}{16/7} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Знак: $\delta > 0$ — часть воды замёрзла, лёд прибавился. Проверка: при $\delta = \frac{1}{8}$ имеем $n = \frac{9/8}{7/8} = \frac{9}{7}$.



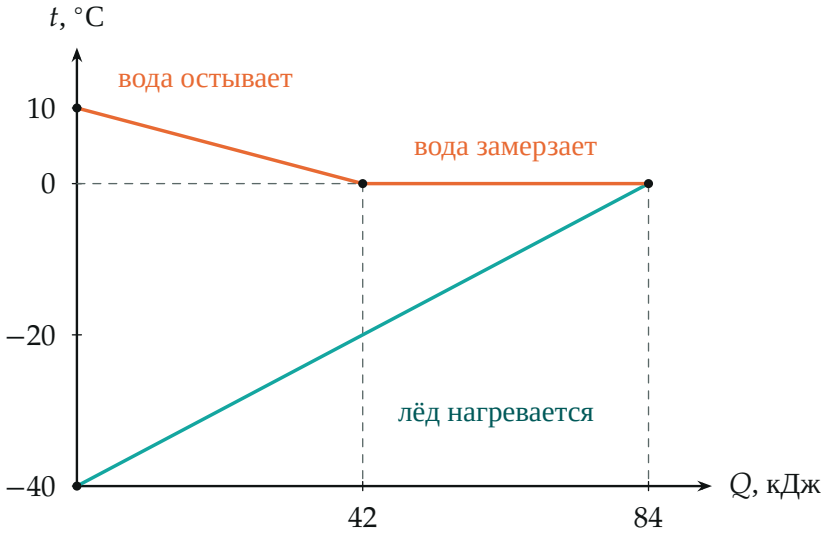
Связь n и δ: чем больше воды замёрзло, тем больше отношение масс льда и воды. При $\delta = \frac{1}{8}$ получается $n = \frac{9}{7}$.

Пункт 2.

2. Конечная температура. После установления равновесия в калориметре есть и лёд, и вода (по условию $n = \frac{9}{7}$, обе массы ненулевые). Смесь воды и льда находится в равновесии только при температуре плавления, поэтому конечная температура — $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$. Зачем это нужно: тогда конечные температуры известны и у воды, и у льда.

3. Что отдаёт и что получает. Лёд получает теплоту, нагреваясь от t_2 до t_0 (вся его начальная масса m): $Q_{\text{пол}} = c_{\text{Л}} m(t_0 - t_2)$. Эту теплоту отдают два процесса. Вся начальная вода массой m остывает от t_1 до t_0: $Q_1 = c_{\text{В}} m(t_1 - t_0)$. Затем часть воды массой Δm замерзает при t_0 и отдаёт $Q_2 = \lambda \Delta m$.

Обратите внимание: остывает вся начальная масса воды m, а не $m - \Delta m$: замёрзшая часть сначала остыла до $0\,^\circ\text{C}$ вместе со всей водой и только потом стала льдом.



Теплообмен в расчёте на $m = 1$ кг. Лёд нагревается от -40 до $0\,^\circ C$ и получает 84 кДж. Вода остывает от 10 до $0\,^\circ C$ (отдаёт 42 кДж), затем при $0\,^\circ C$ замерзает (ещё 42 кДж).

4. Уравнение теплового баланса. Закон сохранения энергии для теплообмена внутри калориметра (потерь нет): $Q_{\text{пол}} = Q_1 + Q_2$,

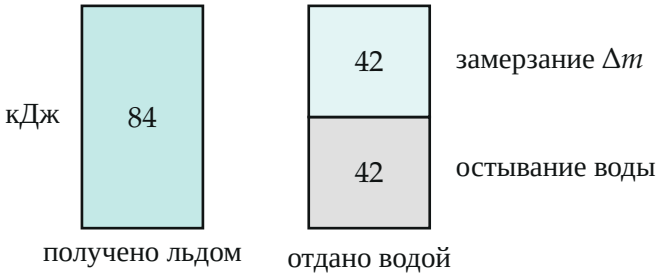
$$c_{\text{Л}} m(t_0 - t_2) = c_{\text{В}} m(t_1 - t_0) + \lambda\, \Delta m.$$

Разделим на m и выразим t_2 через $\delta = \Delta m / m$:

$$t_2 = t_0 - \frac{c_{\text{В}}}{c_{\text{Л}}}(t_1 - t_0) - \delta\, \frac{\lambda}{c_{\text{Л}}}.$$

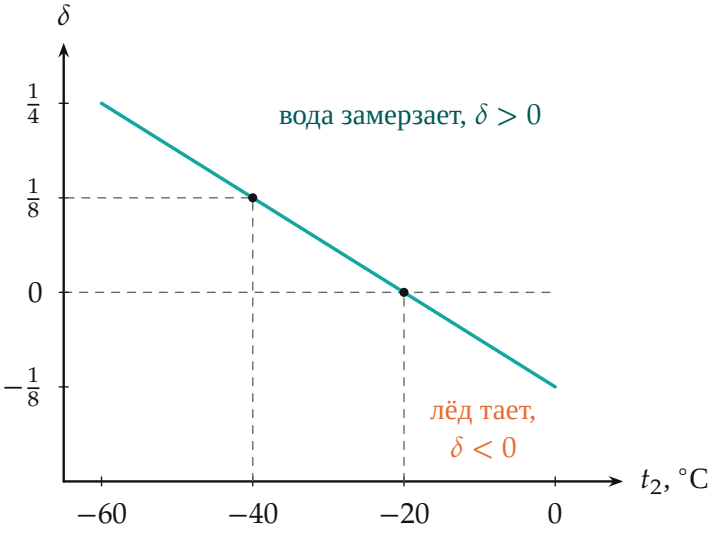
Подставим числа: $\dfrac{c_В}{c_Л} = 2$, $\dfrac{\lambda}{c_Л} = \dfrac{3{,}36 \cdot 10^5}{2{,}1 \cdot 10^3} = 160\ ^\circ\text{C}$:

$$t_2 = 0 - 2 \cdot 10 - \frac{1}{8} \cdot 160 = -20 - 20 = -40\ ^\circ\text{C}.$$



Баланс теплоты в расчёте на $m = 1$ кг: лёд получил 84 кДж, вода отдала $42 + 42$ кДж.

Проверка. Подставим числа в расчёте на $m = 1$ кг: лёд получает $2100 \cdot 40 = 84\,000$ Дж, вода отдаёт $4200 \cdot 10 + 0{,}125 \cdot 336\,000 = 42\,000 + 42\,000 = 84\,000$ Дж. Равенство верно. Предельный случай: при $t_2 = -20\ ^\circ\text{C}$ получаем $\delta = 0$ — тепла остывшей воды ровно хватает, чтобы довести лёд до $0\ ^\circ\text{C}$, и ничего не замерзает и не тает. Если лёд холоднее, воде приходится ещё и замерзать ($\delta > 0$), как в этой задаче; если теплее — часть льда тает ($\delta < 0$).



Доля замёрзшей воды как функция начальной температуры льда: $\delta = \dfrac{c_Л(t_0 - t_2) - c_B(t_1 - t_0)}{\lambda}$. *Точка* $t_2 = -40\,°C$ *даёт* $\delta = \dfrac{1}{8}$.

Ответ. 1) $\delta = \dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$; 2) $t_2 = -40\,°\text{C}$.