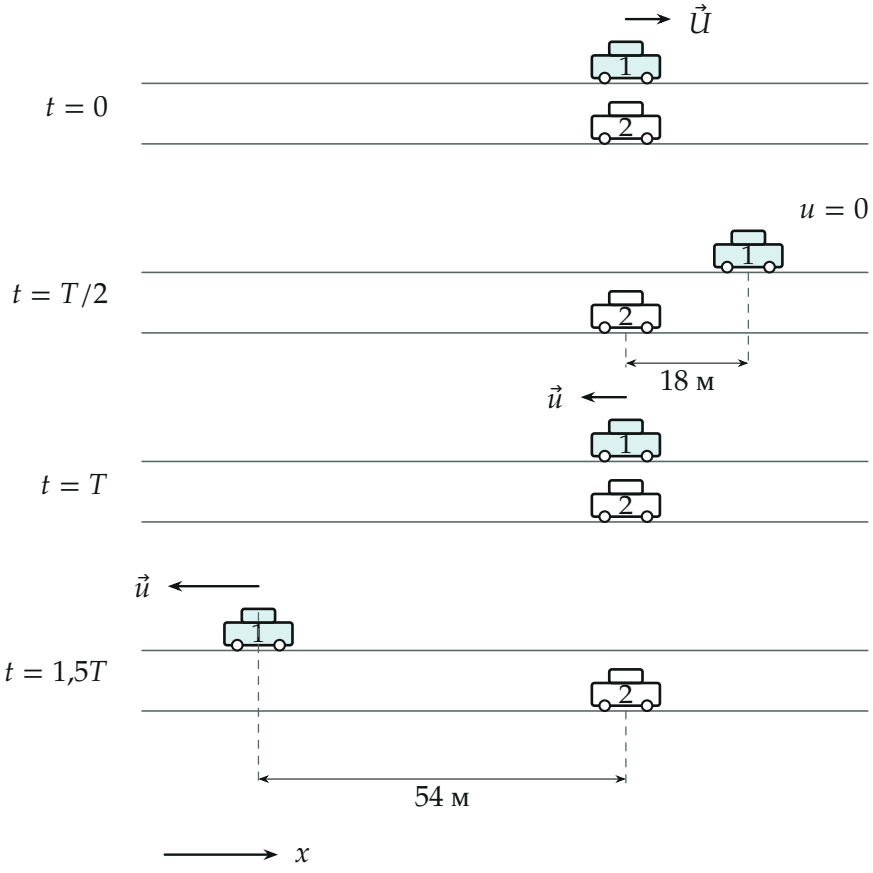
Два автомобиля обгоняют друг друга

Задача 1. [Физтех 2024/25, 9 класс, варианты 09-03–09-04, задача 1] Два автомобиля движутся равноускоренно в положительном направлении оси OX. В момент времени $t = 0$ первый автомобиль обгоняет второй. В этот момент в системе отсчёта, связанной со вторым автомобилем, первый движется со скоростью $U = 12$ м/с. Через $T = 6$ с второй автомобиль догоняет первый.

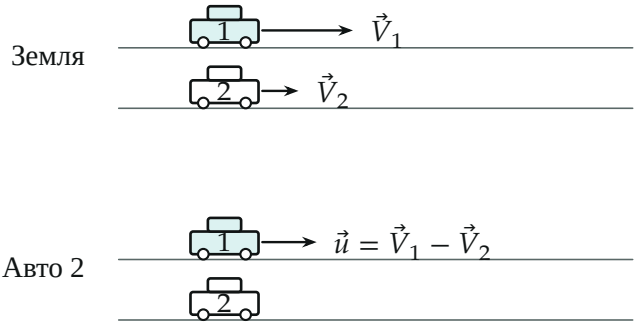
1. Найдите максимальное расстояние L_{MAX} между автомобилями при $0 < t < T$.
2. Найдите расстояние S между автомобилями в момент времени $t = 1{,}5\,T$.



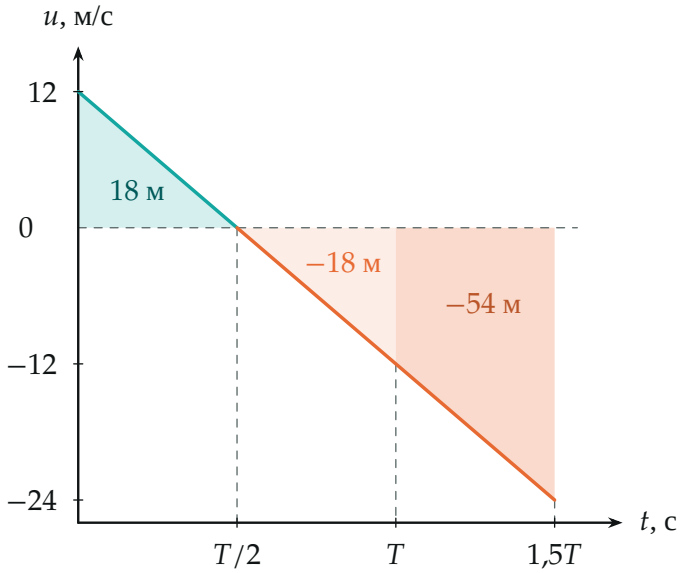
Картина в системе отсчёта второго автомобиля (он неподвижен, масштаб условный): первый автомобиль обгоняет, дальше всех оказывается через $T/2$, возвращается к второму через T и к моменту $1{,}5T$ остаётся позади на 54 м.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Законы движения каждого автомобиля нам не даны, а нужно только расстояние между ними. Поэтому перейдём в систему отсчёта второго автомобиля: в ней он стоит, а первый движется с относительной скоростью $\vec{u} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$. Ускорения обоих постоянны, значит, постоянно и относительное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$: относительное движение — равнопеременное. Задача на движение с остановкой и разворотом, но в относительной системе отсчёта.

Обозначения. Ось x — по направлению OX, нуль — в точке встречи автомобилей при $t = 0$. u — проекция относительной скорости, x — координата первого автомобиля в системе второго, a — проекция относительного ускорения (мы увидим, что $a < 0$).



Один и тот же момент $t = 0$ в двух системах отсчёта (скорости — пример). В системе второго автомобиля он стоит, а первый едет со скоростью $\vec{u}$.



Относительная скорость $u(t)$. Площадь под графиком — перемещение первого автомобиля в системе второго; ниже оси времени площади отрицательны.

Пункт 1.

1. Закон относительного движения. Относительное ускорение постоянно, поэтому

$$u(t) = U + at, \qquad x(t) = Ut + \frac{at^2}{2}.$$

2. Ускорение из условия встречи. В момент T автомобили снова рядом: $x(T) = 0$.

$$UT + \frac{aT^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{2U}{T} = -4 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус: первый автомобиль относительно второго тормозится, его скорость меняется на 4 м/с каждую секунду.

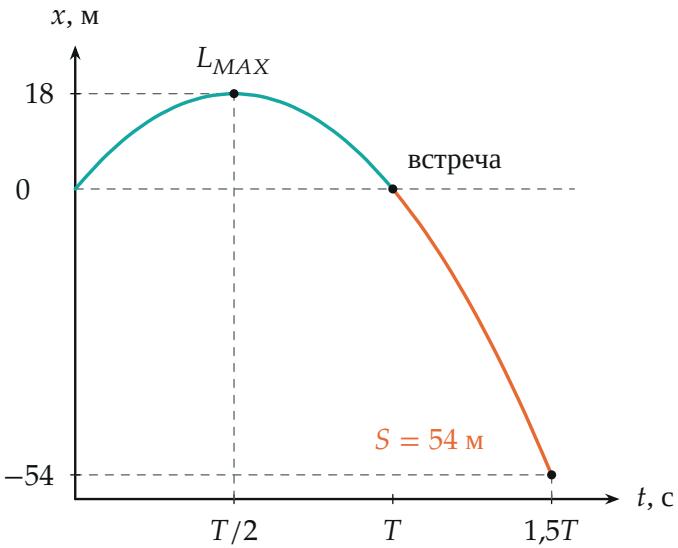
3. Момент наибольшего расстояния. Расстояние между автомобилями растёт, пока первый уезжает от второго, то есть пока $u > 0$. Наибольшее оно в момент, когда относительная скорость обращается в нуль:

$$u(t_*) = U + at_* = 0 \quad \Rightarrow \quad t_* = \frac{U}{|a|} = \frac{T}{2} = 3 \text{ с}.$$

4. Расстояние в этот момент. Перемещение — площадь под графиком $u(t)$ от 0 до t_*, это треугольник с катетами $T/2$ и U:

$$L_{MAX} = \frac{1}{2} U \frac{T}{2} = \frac{UT}{4} = \frac{12 \cdot 6}{4} = 18 \text{ м}.$$

Второй способ — по формуле перемещения: $x(t_*) = U\frac{T}{2} - \frac{2U}{T} \cdot \frac{T^2}{8} = \frac{UT}{2} - \frac{UT}{4} = \frac{UT}{4}$.



Координата первого автомобиля в системе второго — парабола, ветви вниз. Нуль в $t = 0$ и $t = T$, наибольшее значение в $T/2$. Расстояние — модуль координаты.

Пункт 2.

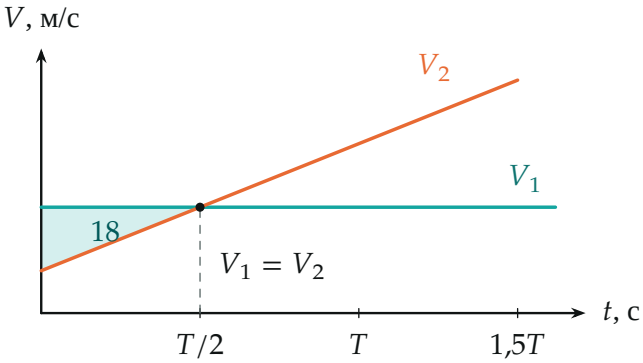
5. Расстояние при $t = 1{,}5T$. Расстояние — это модуль координаты. Подставим $t = 1{,}5T$ в $x(t) = Ut - \dfrac{U}{T}t^2$:

$$x(1{,}5T) = 1{,}5UT - 2{,}25UT = -0{,}75\,UT = -54 \text{ м}, \qquad S = |x| = 54 \text{ м}.$$

Минус: первый автомобиль позади второго.

6. Второй способ — площадь по графику. От T до $1{,}5T$ скорость u меняется от -12 до -24 м/с, перемещение — трапеция: $\dfrac{12 + 24}{2} \cdot 3 = 54$ м вниз по оси, а $x(T) = 0$. Сходится.

7. Третий способ — правило нечётных чисел. В момент $T/2$ относительная скорость нулевая, и за следующие промежутки по $T/2$ перемещения относятся как $1 : 3$, первое равно L_{MAX}. Значит, $x(1{,}5T) = L_{MAX} - (1 + 3)L_{MAX} = -3L_{MAX} = -54$ м.



Пример скоростей в системе отсчёта Земли (одно из возможных значений: $V_1 = 20$ м/с, $V_2 = 8 + 4t$): в момент $T/2$ скорости равны, площадь между графиками до этого момента — наибольшее расстояние. Для ответа сами скорости не нужны.

Проверка. Размерность: $UT/4$ — м/с·с, то есть метры. Пример с числами: $V_1 = 20$ м/с, $V_2 = 8 + 4t$ (относительная скорость $12 - 4t$, как нужно) даёт координаты $x_1 = 20t$, $x_2 = 8t + 2t^2$; при $t = 6$ обе равны 120 м (встреча), при $t = 9$ получаем 180 и 234 м, разность 54 м. Смысл: максимум расстояния — посередине между встречами.

Ответ. 1) $L_{MAX} = \dfrac{UT}{4} = 18$ м; 2) $S = \dfrac{3}{4}UT = 54$ м.