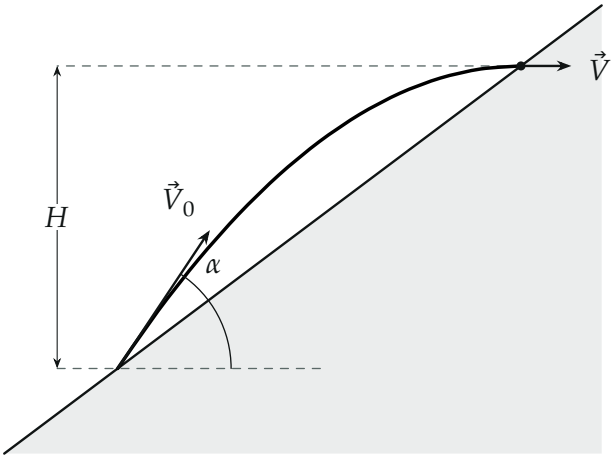
Мяч, брошенный вверх по склону

Задача 2. [Физтех 2024/25, 9 класс, варианты 09-03–09-04, задача 2] На плоском склоне бросают мяч вверх по склону. Точка старта находится на поверхности склона. Вектор скорости мяча перед соударением со склоном направлен горизонтально. Вертикальное перемещение мяча за время полёта $H = 5$ м. Плоский склон образует с горизонтальной плоскостью угол β такой, что $\operatorname{tg}\beta = 0{,}75$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

1. Под каким углом α к горизонту брошен мяч? В ответе укажите $\operatorname{tg}\alpha$ или $\cos\alpha$.
2. Найдите модуль V_0 начальной скорости мяча.
3. Найдите радиус R кривизны траектории мяча в тот момент, когда мяч находится на максимальном удалении от поверхности склона.



Бросок вверх по склону (масштаб по найденным ниже данным). В момент удара мяч в верхней точке траектории: скорость $\vec{V}$ горизонтальна.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Мяч летит под действием одной только силы тяжести: по горизонтали равномерно, по вертикали с ускорением g вниз. Скорость мяча в момент удара горизонтальна, а значит, вертикальная составляющая скорости к этому моменту обратилась в нуль: мяч

ударяется о склон ровно в верхней точке траектории. Значит, H — высота подъёма; угол найдём из того, что точка удара лежит на склоне, а для радиуса кривизны разложим $\vec{g}$ вдоль склона и поперёк. Задача на бросок под углом и радиус кривизны.

Обозначения. Ось x — по горизонтали в сторону склона, ось y — вертикально вверх, начало — точка старта на склоне. α — угол броска, $V_{0x} = V_0\cos\alpha$, $V_{0y} = V_0\sin\alpha$ — проекции начальной скорости, t_1 — время полёта.

Пункт 1.

1. Вертикальная скорость и время полёта. Вертикальная скорость к моменту удара равна нулю, мяч замедлялся с ускорением g на высоту H:

$$V_{0y}^2 = 2gH \;\Rightarrow\; V_{0y} = \sqrt{2gH} = 10\text{ м/с}, \qquad t_1 = \frac{V_{0y}}{g} = 1\text{ с}.$$

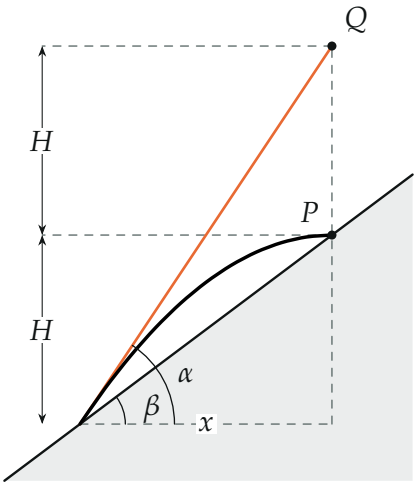
2. Горизонтальное перемещение. Точка падения лежит на склоне на высоте H над точкой старта. Склон — прямая с наклоном β, поэтому $H = x\,\mathrm{tg}\,\beta$:

$$x = \frac{H}{\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{5}{0{,}75} = \frac{20}{3}\text{ м}.$$

3. Горизонтальная составляющая скорости. По горизонтали движение равномерное: $V_{0x} = \dfrac{x}{t_1} = \dfrac{20}{3} \approx 6{,}7$ м/с.

4. Угол броска.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{V_{0y}}{V_{0x}} = \frac{10}{20/3} = 1{,}5, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0{,}55.$$



Второй способ. Прямая OQ — касательная к траектории в точке старта. Точка P траектории лежит на середине вертикального отрезка между горизонтальной осью и точкой Q.

5. Второй способ — свойство параболы. Касательная в точке старта показывает, где был бы мяч без силы тяжести: на вертикали через верхнюю точку на высоте $V_{0y}t_1 = 2H$ (реально мяч поднялся на $V_{0y}t_1 - gt_1^2/2 = V_{0y}t_1/2 = H$). Поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2H}{x} = 2\operatorname{tg}\beta = 1{,}5$. Совпало.

Пункт 2.

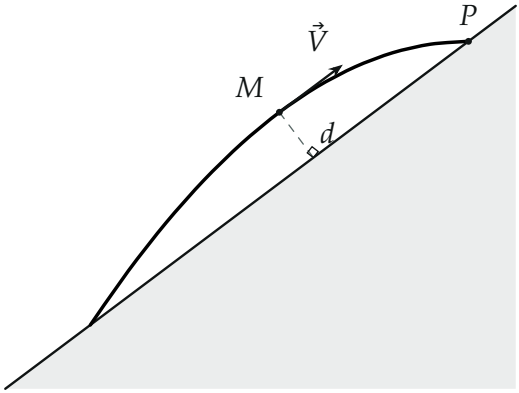
6. Начальная скорость.

$$V_0 = \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2} = \sqrt{\frac{400}{9} + 100} = \frac{10\sqrt{13}}{3} \approx 12 \text{ м/с}.$$

Через угол: $V_0 = V_{0y}/\sin\alpha$, $\sin\alpha = 3/\sqrt{13}$ — то же.

Пункт 3.

7. Где мяч дальше всего от склона. Расстояние от точки траектории до склона — это перпендикуляр к склону. Наибольшее оно в момент, когда составляющая скорости, перпендикулярная склону, обращается в нуль, то есть скорость направлена вдоль склона. Назовём этот момент M.



В точке M скорость $\vec{V}$ параллельна склону, d — наибольшее расстояние от мяча до склона.

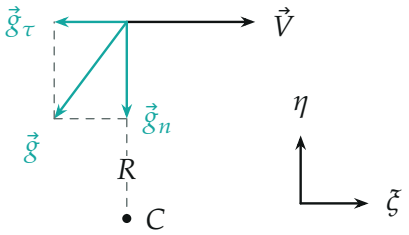
8. Скорость в точке M. Горизонтальная составляющая скорости за весь полёт не менялась: $V_x = V_{0x}$. Вектор $\vec{V}$ параллелен склону, то есть наклонён к горизонту под углом β, поэтому

$$V\cos\beta = V_{0x} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{V_{0x}}{\cos\beta} = \frac{20/3}{0{,}8} = \frac{25}{3} \approx 8{,}3 \text{ м/с}.$$

Вертикальная составляющая $V_y = V\sin\beta = 5$ м/с — половина начальной: мяч в точке M прошёл ровно половину времени подъёма.

9. Нормальное ускорение. Ускорение — только $\vec{g}$, скорость в M идёт вдоль склона, поэтому нормальное ускорение — составляющая $\vec{g}$, перпендикулярная склону. Угол между вертикалью и нормалью к склону равен β (стороны углов взаимно перпендикулярны):

$$a_n = g\cos\beta = 8 \text{ м/с}^2, \qquad a_\tau = g\sin\beta = 6 \text{ м/с}^2.$$



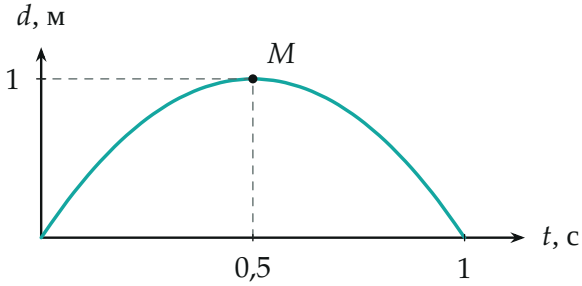
Точка M в осях вдоль и поперёк склона: $\vec{g}$ раскладывается на $\vec{g}_\tau$ вдоль скорости (назад) и $\vec{g}_n$ по нормали, к центру C кривизны. Радиус R условно сокращён.

10. Радиус кривизны. Участок траектории возле M — дуга окружности радиуса R, $a_n = V^2/R$:

$$R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^2}{g\cos\beta} = \frac{625/9}{8} = \frac{625}{72} \approx 8{,}7 \text{ м}.$$

В общем виде ($V_{0x} = \sqrt{2gH}/(2\operatorname{tg}\beta)$) $R = H/(2\sin^2\beta\cos\beta)$.

11. Проверка максимума расстояния вторым способом. Ось поперёк склона: перпендикулярная склону составляющая начальной скорости $V_{0\perp} = V_{0y}\cos\beta - V_{0x}\sin\beta = 8 - 4 = 4$ м/с, перпендикулярное ускорение $g\cos\beta = 8$ м/с^2 (в сторону склона). Расстояние $d(t) = V_{0\perp}t - g\cos\beta\, t^2/2 = 4t - 4t^2$, максимум в момент $t = 0{,}5$ с (там перпендикулярная скорость $4 - 8t = 0$), $d_{max} = 1$ м; при $t = 1$ с $d = 0$ — удар о склон. Момент 0,5 с совпал с п. 8.



Расстояние от мяча до склона: парабола, максимум 1 м в момент 0,5 с (точка M); при $t = 1$ с мяч достигает склона.

Проверка. Размерность: $H/(\sin^2\beta\cos\beta)$ — метры, углы безразмерны. Предел $\beta \to 0$: $R \to \infty$: на пологом склоне полёт почти прямой.

Ответ. 1) $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta = 1{,}5$ ($\cos\alpha = 2/\sqrt{13} \approx 0{,}55$); 2) $V_0 = \sqrt{2gH}/\sin\alpha \approx 12$ м/с; 3) $R = H/(2\sin^2\beta\cos\beta) \approx 8{,}7$ м.