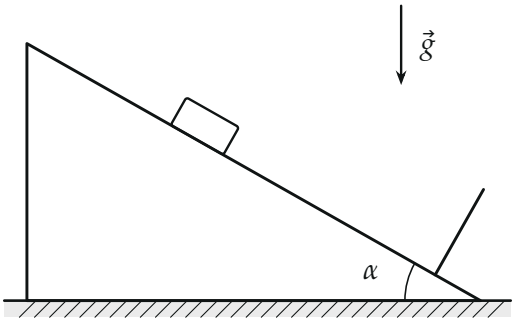
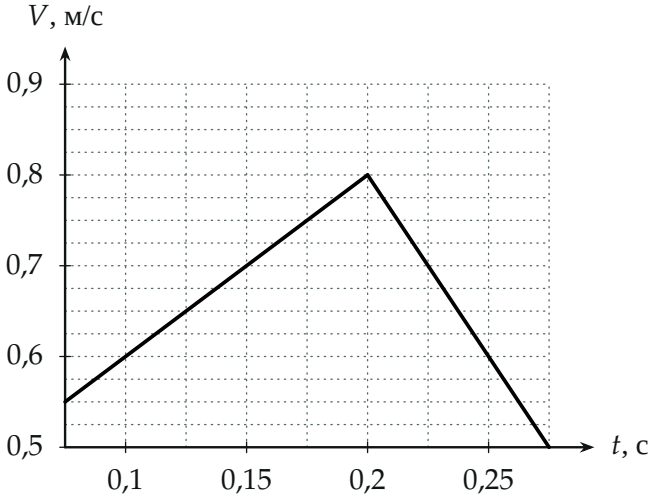
Шайба отскакивает от стенки на клине

Задача 3. [Физтех 2024/25, 9 класс, варианты 09-03–09-04, задача 3] На шероховатой горизонтальной плоскости стоит клин. Шайбу кладут на шероховатую наклонную плоскость клина и сообщают шайбе начальную скорость. Шайба движется вниз по покоящемуся клину, упруго сталкивается со стенкой, перпендикулярной наклонной плоскости клина, и после соударения движется вверх по покоящемуся клину. Поступательное движение шайбы по клину до и после соударения происходит по одной и той же прямой. Часть зависимости модуля скорости шайбы от времени представлена на графике к задаче. Масса шайбы $m = 0{,}5$ кг, масса клина $2m$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Найдите $\sin\alpha$, здесь α — угол, который наклонная плоскость клина образует с горизонтом.
2. Найдите модуль $F_{\text{тр}}$ силы трения, с которой горизонтальная плоскость действует на клин в процессе движения шайбы по клину при $t > 0{,}2$ с до остановки.
3. При каких значениях коэффициента μ трения скольжения клина по горизонтальной плоскости клин будет находиться в покое при $t > 0{,}2$ с?





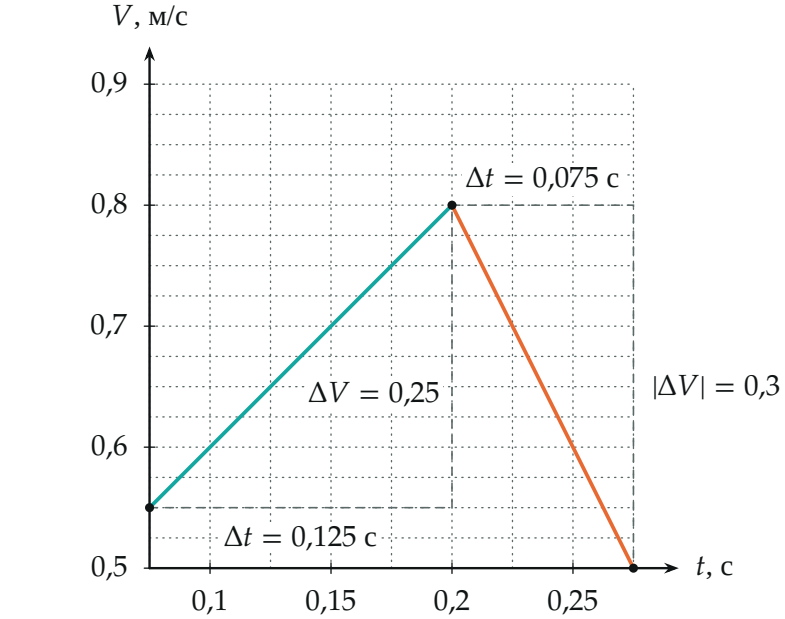
▲ **Решение. Что происходит.** Шайба сначала разгоняется на спуске, ударяется о стенку, отскакивает с той же по модулю скоростью и тормозится на подъёме. График состоит из двух прямых, значит, на каждом участке ускорение постоянно. Тормозит шайба сильнее, чем разгоняется: на подъёме трение складывается со скатывающей силой, на спуске — вычитается. Два участка дают два уравнения на $\sin\alpha$ и коэффициент трения шайбы о клин. Для пунктов 2 и 3 возьмём систему «шайба + клин».

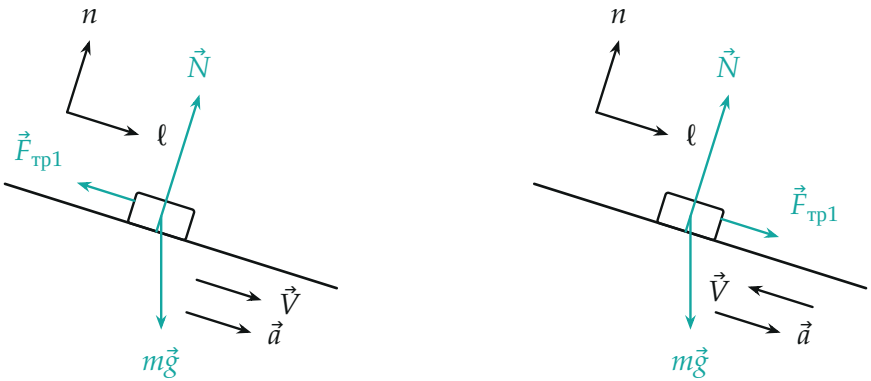
Обозначения. Для шайбы ось ℓ направим вдоль склона вниз, ось n — по нормали к склону от клина. a_1 и a_2 — модули ускорения на спуске и на подъёме, μ_1 — коэффициент трения шайбы о клин (промежуточная величина). Для системы ось x направим горизонтально к стороне, куда склон идёт вниз, ось y — вверх.

Пункт 1.

1. Ускорения по графику. Для равноускоренного движения $a = \Delta V/\Delta t$ — наклон прямой на графике. До удара (от 0,075 до 0,2 с) скорость растёт от 0,55 до 0,8 м/с, а после удара (от 0,2 до 0,275 с) падает от 0,8 до 0,5 м/с:

$$a_1 = \frac{0{,}8 - 0{,}55}{0{,}2 - 0{,}075} = 2\ \text{м/с}^2, \qquad a_2 = \frac{0{,}8 - 0{,}5}{0{,}275 - 0{,}2} = 4\ \text{м/с}^2.$$





Сверху: наклон двух прямых графика — ускорения шайбы (бирюзовый участок — спуск, морковный — подъём). Излом при $t = 0{,}2$ с — удар о стенку: модуль скорости не изменился, поменялось направление. Снизу (к шагу 2): силы на шайбу. Слева — спуск, справа — подъём. Трение $\vec{F}_{тр1}$ увеличено для наглядности: на самом деле оно примерно в десять раз меньше $m\vec{g}$.

Обратите внимание: на графике модуль скорости, излом при $t = 0{,}2$ с — не остановка, а упругий удар о стенку покоящегося клина: модуль 0,8 м/с тот же, направление — вверх по склону.

2. Силы на шайбу. На шайбу действуют три силы: тяжесть $m\vec{g}$, нормальная реакция $\vec{N}$ перпендикулярно склону и трение скольжения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ вдоль склона против скорости. Ось ℓ взята вдоль ускорения, $\vec{N}$ в неё не проецируется.

3. Второй закон Ньютона для шайбы. Вдоль нормали шайба не ускоряется, поэтому в проекции на ось n: $N - mg\cos\alpha = 0$, то есть $N = mg\cos\alpha$, и трение скольжения $F_{\text{тр1}} = \mu_1 mg\cos\alpha$.

На спуске шайба разгоняется вниз по склону, трение направлено вверх по склону. Проекция на ось ℓ:

$$ma_1 = mg\sin\alpha - \mu_1 mg\cos\alpha.$$

На подъёме шайба движется вверх, трение направлено вниз по склону, а ускорение — тоже вниз по склону, ведь она тормозит. Проекция на ось ℓ:

$$ma_2 = mg\sin\alpha + \mu_1 mg\cos\alpha.$$

Неизвестных два (α и μ_1), уравнений два. Сложим уравнения: слагаемые с трением уничтожатся,

$$a_1 + a_2 = 2g\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2g} = \frac{2+4}{20} = 0{,}3.$$

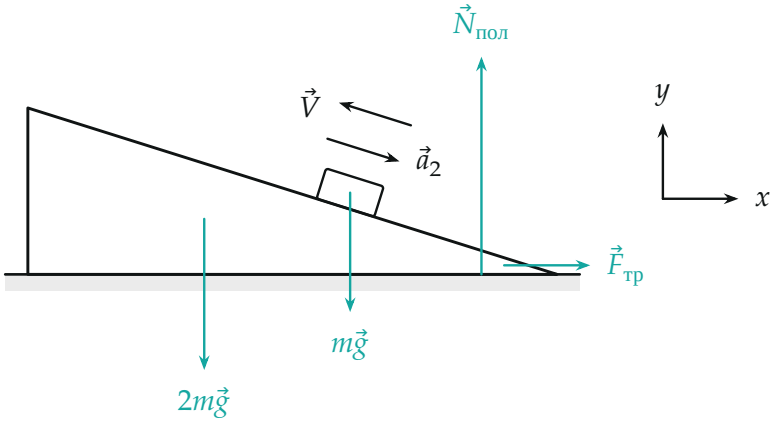
Вычтем первое из второго: $a_2 - a_1 = 2\mu_1 g\cos\alpha$, откуда $\mu_1\cos\alpha = \dfrac{a_2 - a_1}{2g} = 0{,}1$; угол α острый, поэтому $\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{0{,}91} \approx 0{,}954$ и $\mu_1 \approx 0{,}105$. (μ_1 пригодится в проверке.)

Второй способ: $(a_1 + a_2)/2 = 3$ м/с^2 — ускорение без трения, $g\sin\alpha$; отсюда снова $\sin\alpha = 0{,}3$.

Пункт 2.

4. Система и её ускорение. При $t > 0{,}2$ с до остановки шайба едет вверх и тормозит, её ускорение $\vec{a}_2$ направлено вниз вдоль склона, а клин покоится (это условие пункта 3 проверим там). Возьмём систему «шайба + клин». Зачем: силы между шайбой и клином — внутренние и в уравнение не попадут. Внешних сил четыре: тяжесть шайбы $m\vec{g}$, тяжесть клина $2m\vec{g}$, нормальная реакция плоскости $\vec{N}_{\text{пол}}$ (вертикально вверх) и

трение плоскости о клин $\vec{F}_{\text{тр}}$ (горизонтально).



Внешние силы на систему «шайба + клин» при подъёме шайбы. $\vec{F}_{тр}$ увеличена втрое; направлена по x — только она даёт системе горизонтальное ускорение.

5. Второй закон Ньютона для системы тел. Сумма внешних сил равна сумме произведений массы на ускорение каждого тела: у шайбы это $m\vec{a}_2$, у покоящегося клина — ноль. Векторно:

$$m\vec{a}_2 + 2m \cdot \vec{0} = m\vec{g} + 2m\vec{g} + \vec{N}_{\text{пол}} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Ускорение $\vec{a}_2$ направлено вниз по склону, поэтому его проекции на оси x и y: $a_{2x} = +a_2 \cos\alpha$ и $a_{2y} = -a_2 \sin\alpha$. Проекция на горизонтальную ось x: тяжесть и $\vec{N}_{\text{пол}}$ в неё не попадают, остаётся

$$ma_2 \cos\alpha = F_{\text{тр},x} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}} = ma_2 \cos\alpha = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}954 \approx 1{,}9 \text{ Н}.$$

Обратите внимание: на подъёме $\vec{a}_2$ направлено вниз по склону, хотя скорость — вверх; иначе трение получится в обратную сторону.

Пункт 3.

6. Нормальная реакция. Проекция того же закона на вертикальную ось y (проекция $\vec{a}_2$ отрицательна: шайба ускоряется вниз): $-ma_2 \sin\alpha =$

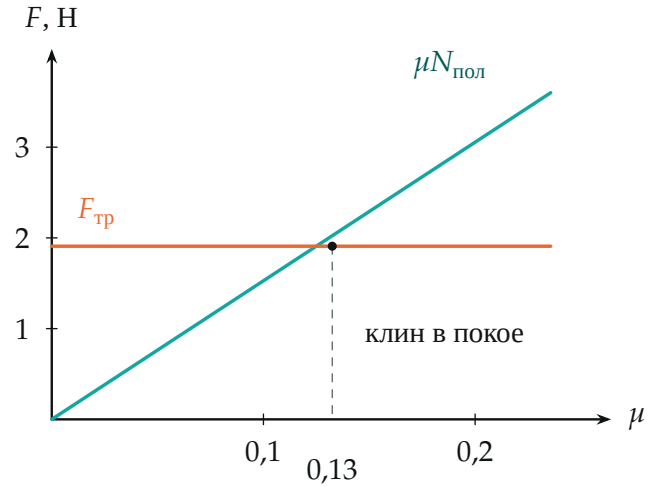
$N_{\text{пол}} - 3mg$, откуда

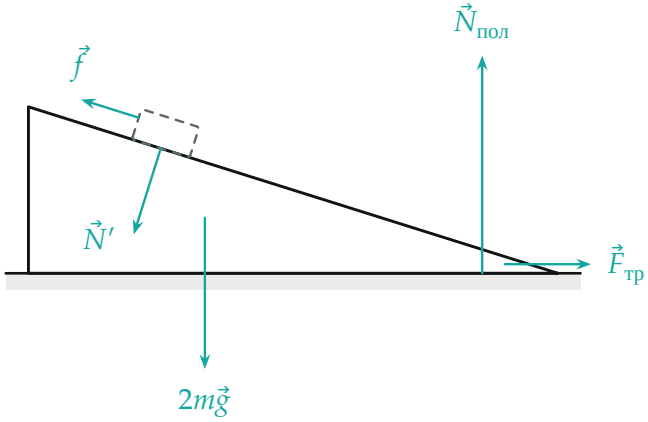
$$N_{\text{пол}} = 3mg - ma_2 \sin\alpha = 15 - 0{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}3 = 14{,}4 \text{ Н}.$$

$N_{\text{пол}} < 3mg$: шайба ускоряется вниз, система «легчает».

7. Условие покоя клина. Клин не сдвинется, если нужная сила трения не больше предельной силы трения покоя о плоскость:

$$F_{\text{тр}} \le \mu N_{\text{пол}} \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{F_{\text{тр}}}{N_{\text{пол}}} = \frac{a_2 \cos\alpha}{3g - a_2 \sin\alpha} = \frac{1{,}908}{14{,}4} \approx 0{,}13.$$





Сверху: нужная сила трения $F_{тр} \approx 1{,}9$ Н (морковная) и предельная сила трения покоя $\mu N_{пол}$ (бирюзовая прямая). Клин в покое, пока прямая не ниже горизонтали, то есть при $\mu \geq 0{,}13$. Снизу (к проверке вторым способом): силы на клин: давление шайбы $\vec{N}'$ и её трение $\vec{f}$ (увеличено), тяжесть $2m\vec{g}$, реакция плоскости и трение плоскости. Шайба показана штрихом.

Проверка вторым способом: силы на сам клин. Шайба давит на клин силой $\vec{N}'$ перпендикулярно склону (третий закон Ньютона), $N' = mg\cos\alpha \approx 4{,}77$ Н, и тянет его трением $\vec{f}$ вверх по склону (на шайбу трение — вниз, на клин — вверх), $f = \mu_1 N' = 0{,}5$ Н. Проекция на x: обе силы дают $-(N'\sin\alpha + f\cos\alpha) = -(1{,}43 + 0{,}48) = -1{,}91$ Н, клин покоится, поэтому $F_{тр} = 1{,}91$ Н по оси x. Проекция на y: $N_{пол} = 2mg + N'\cos\alpha - f\sin\alpha = 10 + 4{,}55 - 0{,}15 = 14{,}4$ Н. Оба числа совпали с найденными для системы.

Проверка. Размерности: $ma_2\cos\alpha$ — ньютоны, $F_{тр}/N_{пол}$ безразмерно, как μ; при меньшем μ клин поехал бы. Предел $a_2 = 0$: $F_{тр} = 0$, $N_{пол} = 3mg$ — обычный покой. Смысл: вбок шайба толкает клин всего на 1,9 Н против 15 Н веса — хватает $\mu \approx 0{,}13$ (строго $\mu \geq 0{,}1325$).

Ответ. 1) $\sin\alpha = 0{,}3$; 2) $F_{тр} \approx 1{,}9$ Н; 3) $\mu \geq 0{,}13$.