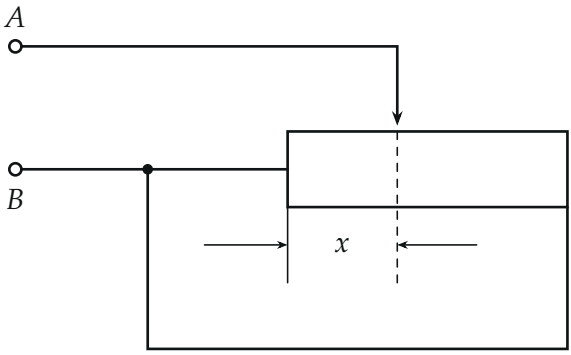
Нагреватель для размораживания трубы

Задача 4. [Физтех 2024/25, 9 класс, варианты 09-03–09-04, задача 4] Для размораживания водопроводной трубы, в которой замёрзла вода, применили электрический нагреватель, подключённый к сети постоянного тока $I = 10$ А. За время $\tau = 250$ с нагреватель растапливает $m = 1$ кг льда, температура которого $t_0 = 0\,^\circ$C. Электрическая схема нагревателя представлена на рисунке. Сопротивление обмотки $R = 90$ Ом, длина обмотки $L = 30$ см.

1. Найдите сопротивление R_1 нагревателя. КПД нагревателя $\eta = 66{,}8\%$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг.
2. На каком наименьшем расстоянии x от левого края обмотки находится подвижный контакт в процессе размораживания? Перемещая подвижный контакт, находят такое его положение, при котором мощность тепловыделения на нагревателе становится максимальной.
3. Найдите эту максимальную мощность P_{MAX}.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Нагреватель — обмотка, к которой подключены клемма B (она соединена с обоими концами обмотки) и подвижный контакт A. Контакт делит обмотку на две части, и между A и B эти части включены параллельно. От положения контакта зависит сопротивление нагревателя R_1, а значит, и выделяемая мощность. В пункте 1 работает закон сохранения энергии: тепло для плавления льда — доля η от теплоты, выделенной током. В пункте 2 нужно связать R_1 и

положение контакта. В пункте 3 — найти наибольшее R_1; важно, что в сети постоянный *ток*, а не напряжение.

Обозначения. x — расстояние от левого края обмотки до контакта; R_x — сопротивление части обмотки слева от контакта, $R-R_x$ — справа; R_1 — сопротивление между клеммами A и B; Q — теплота, выделенная нагревателем.

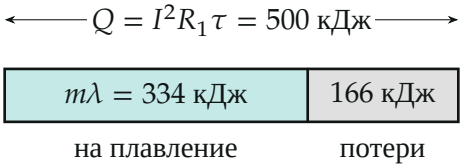
Пункт 1.

1. Теплота плавления. Лёд уже при температуре плавления 0 °C, поэтому его не нужно нагревать: вся полезная теплота идёт на плавление, $Q_{\text{пол}} = m\lambda = 1 \cdot 3{,}34 \cdot 10^5 = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж.

2. Теплота, выделенная током. Через нагреватель течёт ток I, сопротивление нагревателя R_1. Закон Джоуля — Ленца за время τ: $Q = I^2 R_1 \tau$. КПД — отношение полезной теплоты к выделенной, $\eta = \dfrac{m\lambda}{I^2 R_1 \tau}$, откуда

$$R_1 = \frac{m\lambda}{\eta I^2 \tau} = \frac{3{,}34 \cdot 10^5}{0{,}668 \cdot 100 \cdot 250} = \frac{3{,}34 \cdot 10^5}{16\,700} = 20 \text{ Ом}.$$

Обратите внимание: ток I течёт через весь нагреватель, то есть между A и B, а сопротивление нагревателя — R_1, а не сопротивление всей обмотки $R = 90$ Ом.

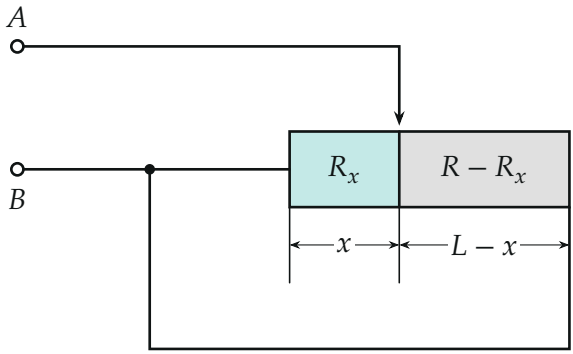


Энергетический баланс: из 500 кДж, выделенных током, на плавление льда идёт 334 кДж (КПД 334/500 = 0,668), остальное — потери.

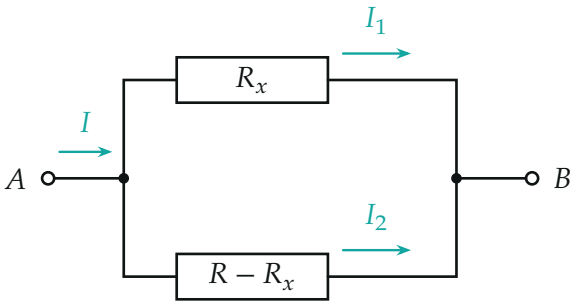
Пункт 2.

3. Обмотка как два резистора. Обмотка однородная, поэтому сопротивление части пропорционально её длине: слева от контакта $R_x = R\dfrac{x}{L}$, справа остаётся $R - R_x = R\left(1 - \dfrac{x}{L}\right)$. Клемма B присоединена к обоим

концам обмотки, а контакт A — к точке между частями, поэтому обе части лежат между A и B и соединены параллельно.



Контакт делит обмотку на две части: слева — R_x (бирюзовая заливка), справа — $R - R_x$ (серая). Обе соединены с клеммой B.



Эквивалентная схема нагревателя: две параллельные ветви между A и B; I_1 и I_2 — токи в левой и правой частях.

4. Сопротивление параллельных ветвей. Для двух параллельных резисторов $\dfrac{1}{R_1} = \dfrac{1}{R_x} + \dfrac{1}{R - R_x}$, то есть

$$R_1 = \frac{R_x(R - R_x)}{R}.$$

Подставим $R_x = Rx/L$ и обозначим $u = x/L$ — долю длины обмотки слева от контакта:

$$\frac{R_1}{R} = u(1-u) \quad \Rightarrow \quad u^2 - u + \frac{R_1}{R} = 0.$$

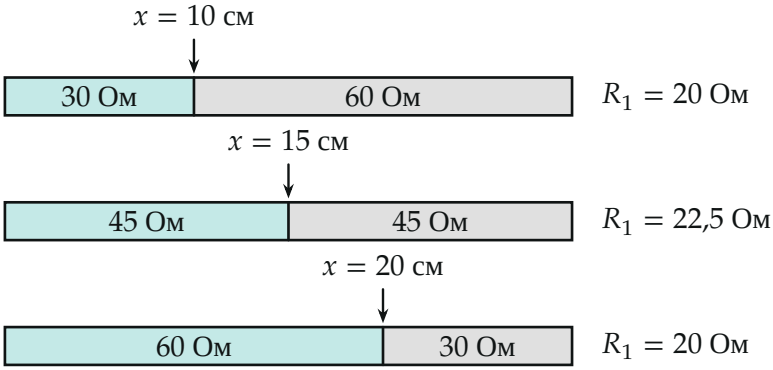
Здесь $R_1/R = 20/90 = 2/9$. Решим квадратное уравнение:

$$u = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4R_1}{R}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{3}\right),$$

то есть $u = \frac{1}{3}$ или $u = \frac{2}{3}$, откуда $x = 10$ см или $x = 20$ см. Наименьшее расстояние — меньший корень, $x = 10$ см.

Два корня — не случайность: уравнение не меняется при замене $x \to L - x$, ведь тогда ветви просто меняются местами. Поэтому одинаковое R_1 даёт симметричные положения контакта.

Проверка подстановкой: при $x = 10$ см $R_x = 30$ Ом, $R - R_x = 60$ Ом, $R_1 = \frac{30 \cdot 60}{90} = 20$ Ом (рисунок ниже).



Положения контакта 10, 15 *и* 20 *см. При* 10 *и* 20 *см* $R_1 = 20$ *Ом (ветви меняются местами), при* 15 *см — наибольшее* 22,5 *Ом.*

Пункт 3.

5. Мощность и сопротивление. В сети постоянный ток I, поэтому мощность тепловыделения на нагревателе $P = I^2R_1$ тем больше, чем

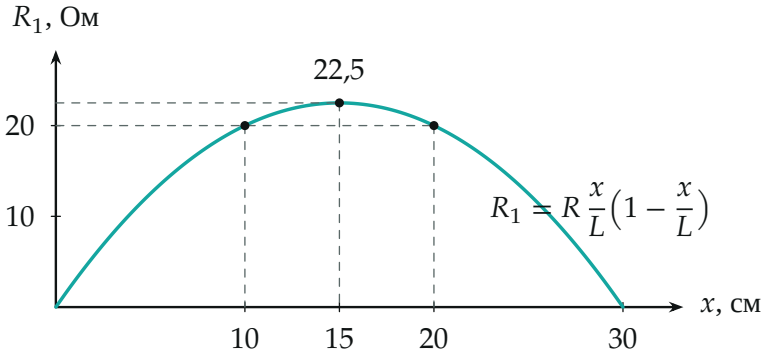
больше R_1. Нужно найти наибольшее R_1. (При постоянном напряжении было бы наоборот: $P = U^2/R_1$ — наибольшая при наименьшем R_1.)

6. Наибольшее сопротивление нагревателя. Сумма сопротивлений ветвей постоянна: $R_x + (R - R_x) = R$. Произведение двух чисел с постоянной суммой наибольшее, когда числа равны (в алгебре: $u(1-u) = \frac{1}{4} - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$). Значит, R_1 наибольшее при $R_x = R - R_x = \frac{R}{2}$, то есть при контакте посередине обмотки, $x = 15$ см:

$$R_{1\,\max} = \frac{(R/2)(R/2)}{R} = \frac{R}{4} = 22{,}5 \text{ Ом}.$$

7. Мощность.

$$P_{\max} = I^2 R_{1\,\max} = I^2 \frac{R}{4} = 100 \cdot 22{,}5 = 2250 \text{ Вт}.$$



Зависимость R_1 от положения контакта — парабола. Значение 20 Ом достигается при 10 и 20 см, наибольшее значение 22,5 Ом — при 15 см.

Проверка. Размерности: Дж/(А^2·с) = Ом; А^2·Ом = Вт. Согласованность: $R_{1\,\max} = 22{,}5$ Ом больше найденных 20 Ом, поэтому в пункте 2 нашлись два положения контакта; будь нужное R_1 больше 22,5 Ом, решений не было бы. Смысл: у такого делителя сопротивление наибольшее в середине, а на краях одна часть обмотки почти закорачивает другую.

Ответ. 1) $R_1 = 20$ Ом; 2) $x = 10$ см; 3) $P_{\text{MAX}} = 2250$ Вт.