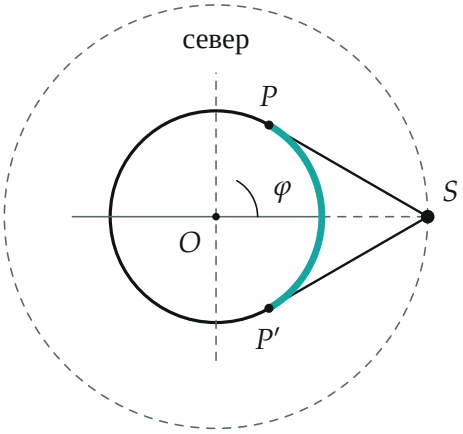
Спутник и широты приёма

Задача 5. [Физтех 2024/25, 9 класс, варианты 09-03–09-04, задача 5] Искусственный спутник Земли запущен с экваториального космодрома и движется по окружности в плоскости земного экватора. Приём электромагнитных волн со спутника возможен на той части земной поверхности, которая лежит на широтах от $\varphi = 60°$ северной широты до $\varphi = 60°$ южной широты.

1. Найдите период T обращения спутника. Ускорение свободного падения у поверхности планеты $g = 10$ м/с^2. Радиус Земли $R = 6400$ км. Распространение электромагнитных волн прямолинейное.
2. Какой промежуток времени Δt разделяет два последовательных прохода спутника над космодромом старта? Спутник движется по орбите в направлении суточного вращения Земли. Длительность земных суток $T_3 = 24$ ч.



Поясняющий рисунок: вид на плоскость меридиана спутника. Бирюзовая дуга — часть поверхности, откуда спутник виден; P и P' — границы зоны приёма, прямые SP и SP' касаются Земли.

▲ **Решение. Что происходит.** Приём возможен там, откуда спутник виден по прямой, не закрытый Землёй. Самая северная точка приёма —

та, где луч со спутника лишь касается поверхности: выше Земля загораживает спутник. Эта граница на широте 60° связывает радиус орбиты с радиусом Земли — получится прямоугольный треугольник. Дальше единственная сила — притяжение Земли, а величину GM мы не знаем, но знаем g и R: тот же закон тяготения у поверхности даёт $GM = gR^2$. Во втором пункте спутник и космодром вращаются в одну сторону с разными угловыми скоростями, и спутник вновь оказывается над космодромом, когда обгонит его ровно на один оборот. Класс задачи: круговая орбита и относительное движение по окружности с постоянными угловыми скоростями.

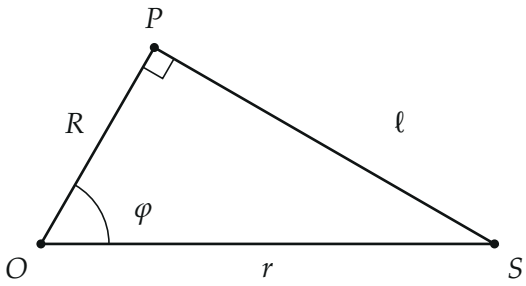
Обозначения. O — центр Земли, S — спутник, r — радиус орбиты, M — масса Земли, m — масса спутника, $\omega = 2\pi/T$ — угловая скорость спутника, $\omega_3 = 2\pi/T_3$ — Земли.

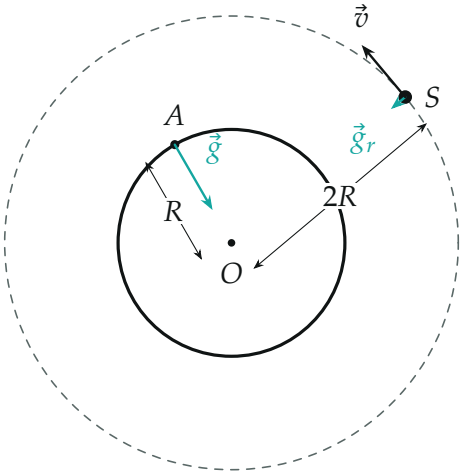
Пункт 1.

1. Радиус орбиты. Сигнал распространяется по прямой. Точка P на широте φ на меридиане спутника видит его, пока луч SP не идёт сквозь Землю; на границе зоны приёма луч касается поверхности в точке P. Касательная перпендикулярна радиусу, поэтому в треугольнике OPS угол при P прямой. Гипотенуза — $OS = r$, катет — $OP = R$, а угол при O между OS (лежит в плоскости экватора) и OP равен широте φ. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{R}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{R}{\cos 60^\circ} = 2R = 12\,800 \text{ км}.$$

Обратите внимание: 60° — предельная широта, при которой луч ещё касается Земли. Чем ниже орбита, тем меньше эта предельная широта; поэтому условие и определяет r однозначно.





Сверху: треугольник OPS: угол при P прямой, катет $OP = R$, гипотенуза $OS = r$, угол при O равен φ. Здесь $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, значит, $r = 2R$. Снизу: у поверхности ускорение g, на орбите $r = 2R$ оно в $(r/R)^2 = 4$ раза меньше: $g_r = g/4$. Скорость $\vec{v}$ перпендикулярна радиусу.

2. Закон тяготения. Единственная сила, действующая на спутник, — притяжение Земли $F = \dfrac{GMm}{r^2}$, направленное к центру. Она сообщает спутнику центростремительное ускорение $\omega^2 r$. Второй закон Ньютона в проекции на радиус к центру Земли:

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}.$$

Величину GM выразим из того же закона для тела на поверхности ($r = R$, ускорение g): $mg = \dfrac{GMm}{R^2}$, то есть $GM = gR^2$. Тогда

$$\omega^2 = \frac{gR^2}{r^3}.$$

3. Период. При $r = 2R$ получаем $\omega^2 = \dfrac{gR^2}{8R^3} = \dfrac{g}{8R}$ и

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{8R}{g}} = 4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 4\pi\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}4\cdot 10^6}{10}} \approx 4\pi\cdot 1131 \approx 14\,200\ \text{с}.$$

Это около 3,9 ч. Второй способ: скорость спутника на орбите $v = \sqrt{gR^2/r} = \sqrt{gR/2} \approx 5{,}7$ км/с, и $T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi\cdot 12{,}8\cdot 10^6}{5657} \approx 14\,200$ с.

Пункт 2.

4. Угловые скорости. Спутник движется в ту же сторону, что вращается Земля, поэтому космодром (на экваторе) и спутник идут по кругам в одну сторону. Угловая скорость спутника $\omega = 2\pi/T$ больше, чем у космодрома $\omega_3 = 2\pi/T_3$ (период 14 200 с против 86 400 с), поэтому спутник догоняет космодром. В момент старта спутник над космодромом.

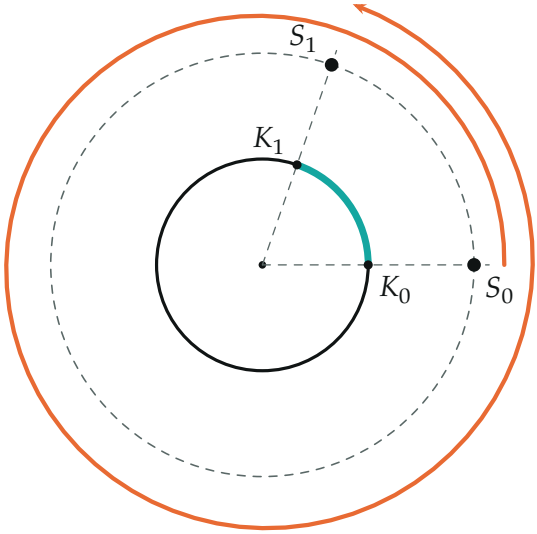
5. Условие нового прохода. За время Δt спутник проходит угол $\omega\Delta t$, космодром — $\omega_3\Delta t$. Спутник снова над космодромом, когда он обогнал его ровно на один оборот:

$$\omega\Delta t - \omega_3\Delta t = 2\pi \quad\Rightarrow\quad \frac{2\pi}{T}\Delta t - \frac{2\pi}{T_3}\Delta t = 2\pi \quad\Rightarrow\quad \Delta t = \frac{TT_3}{T_3 - T}.$$

Числа: $T_3 = 86\,400$ с, $T = 14\,217$ с,

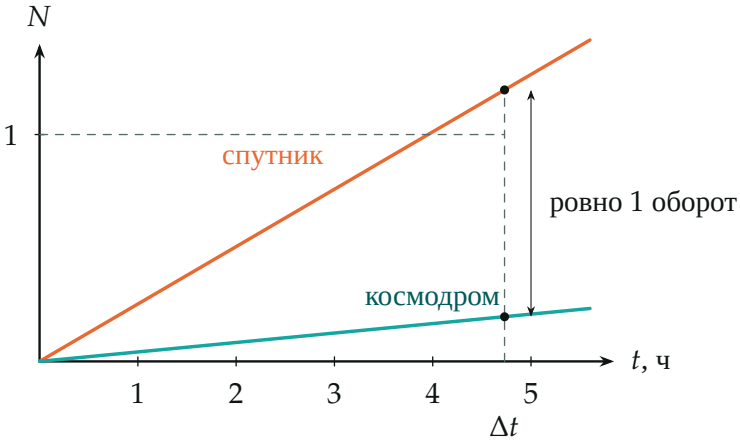
$$\Delta t = \frac{14\,217\cdot 86\,400}{86\,400 - 14\,217} \approx 17\,000\ \text{с} \approx 1{,}7\cdot 10^4\ \text{с} \approx 4{,}7\ \text{ч}.$$

Обратите внимание: Δt больше периода T. Пока спутник делает полный оборот, космодром успевает уехать вперёд, и спутнику нужно ещё его догнать.



космодром: $\omega_3 \Delta t$

спутник: $\omega \Delta t = 2\pi + \omega_3 \Delta t$



Сверху: вид с северного полюса. За время Δt космодром проходит дугу K_0K_1, а спутник — ту же дугу и ещё один полный оборот (спираль), и они снова на одной прямой с центром. Снизу: число оборотов спутника и космодрома. Прямые расходятся; когда разность достигает 1 оборота — спутник снова над космодромом ($\Delta t \approx 4{,}7$ ч).

Проверка. Размерность: $TT_3/(T_3 - T)$ — секунды. Второй способ — по числу оборотов: за $\Delta t = 17\,017$ с спутник делает $\Delta t/T = 1{,}197$ оборота, космодром — $\Delta t/T_3 = 0{,}197$; разность ровно 1. Предел: если бы Земля не вращалась ($T_3 \to \infty$), получилось бы $\Delta t \to T$. Если бы спутник летел против вращения Земли, угловые скорости складывались бы: $\Delta t = \dfrac{TT_3}{T_3 + T} \approx 12\,200$ с — заметно меньше; направление важно.

Ответ. 1) $T = 4\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}} \approx 14\,200$ с; 2) $\Delta t = \dfrac{TT_3}{T_3 - T} \approx 1{,}7 \cdot 10^4$ с.