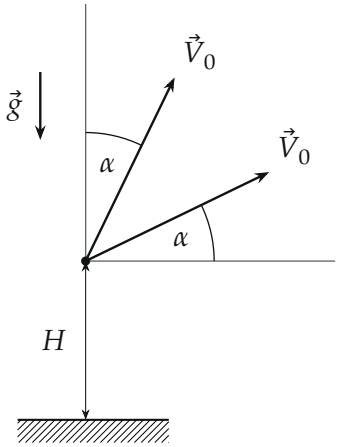
Осколки фейерверка с параллельными скоростями

Задача 1. [Физтех 2025/26, 10 класс, вариант 10-01, задача 1] На высоте $H = 3{,}75$ м над горизонтальной площадкой фейерверк разрывается на множество осколков, два из которых движутся в одной вертикальной плоскости с одинаковой по модулю начальной скоростью $V_0 = 11$ м/с. Вектор скорости первого осколка образует угол α с горизонтом, вектор скорости второго осколка образует угол α с вертикалью (см. рис.). За мгновение до падения первого осколка на горизонтальную площадку скорости осколков параллельны.

1. Под каким углом φ к вертикали в этот момент движутся осколки? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха считайте пренебрежимо малым.
2. Найдите скорость V_1 первого осколка перед падением на площадку.
3. Найдите $\cos\alpha$.
4. Найдите наибольшее расстояние d между осколками в процессе полёта осколков.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Оба осколка летят с одним и тем же ускорением $\vec{g}$, поэтому разность их скоростей не меняется со временем:

осколки удаляются друг от друга с постоянной относительной скоростью $\vec{u}$, и расстояние между ними растёт линейно. Направление $\vec{u}$ мы узнаем из начальных скоростей, а то, что скорости в конце параллельны, скажет, куда направлены сами скорости.

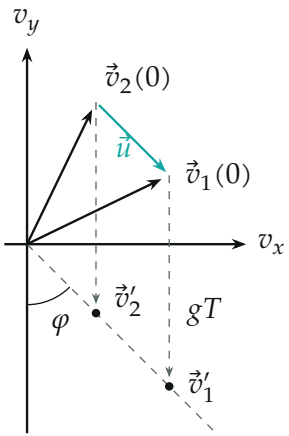
Обозначения. Ось x направим горизонтально в сторону полёта, ось y — вверх, начало — в точке разрыва. $\vec{v}_1(t)$ и $\vec{v}_2(t)$ — скорости осколков в момент t, T — время полёта первого осколка. Начальные скорости: $\vec{v}_1(0) = V_0(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ и $\vec{v}_2(0) = V_0(\sin\alpha,\ \cos\alpha)$.

Пункт 1.

1. Относительная скорость. Для каждого осколка $\vec{v}_i(t) = \vec{v}_i(0) + \vec{g}\,t$. Вычтем одно уравнение из другого:

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1(0) - \vec{v}_2(0) = V_0(\cos\alpha - \sin\alpha)\,(1,\,-1).$$

Вектор $\vec{u}$ параллелен вектору $(1,-1)$, то есть составляет $45°$ с вертикалью при любом $\alpha \neq 45°$ (при $\alpha = 45°$ осколки летели бы одинаково и вопрос о расстоянии не имел бы смысла).



Годограф ($\vec{v}'_i = \vec{v}_i(T)$): концы векторов скорости (от общего начала) опускаются на gT по вертикали, а их разность $\vec{u}$ остаётся прежней. В момент T концы лежат на одной прямой с началом — скорости параллельны.

2. Направление скоростей перед падением. В момент T векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ параллельны, значит, и их разность $\vec{u}$ параллельна им: все три век-

тора лежат на одной прямой, параллельной $(1, -1)$. Скорости осколков направлены вниз под углом

$$\varphi = 45^\circ \text{ к вертикали.}$$

Пункт 2.

3. Скорость перед падением. Применим закон сохранения механической энергии для первого осколка между разрывом и падением (сопротивления нет, работает только сила тяжести):

$$\frac{V_1^2}{2} = \frac{V_0^2}{2} + gH \quad \Rightarrow \quad V_1 = \sqrt{V_0^2 + 2gH} = \sqrt{121 + 75} = 14 \text{ м/с}.$$

Угол α здесь не нужен: модуль скорости у земли зависит только от высоты и начальной скорости.

Пункт 3.

4. Косинус угла. Горизонтальная проекция скорости не меняется (g направлено вертикально): $v_{1x} = V_0 \cos\alpha$ в течение всего полёта. В момент падения вектор скорости идёт под 45° к вертикали, поэтому $v_{1x} = V_1 \sin 45^\circ$:

$$V_0 \cos\alpha = \frac{V_1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{V_1}{\sqrt{2}\,V_0} = \frac{14}{11\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{11} \approx 0{,}9.$$

Тогда $V_0 \cos\alpha = 7\sqrt{2} \approx 9{,}90$ м/с и $V_0 \sin\alpha = \sqrt{V_0^2 - V_0^2\cos^2\alpha} = \sqrt{121 - 98} = \sqrt{23} \approx 4{,}80$ м/с; $\alpha \approx 25{,}8^\circ$.

Пункт 4.

5. Как меняется расстояние. Пока летят оба осколка, $d(t) = ut$ — растёт линейно. Модуль относительной скорости

$$u = \sqrt{2}\,V_0(\cos\alpha - \sin\alpha) = \sqrt{2}\,(9{,}90 - 4{,}80) \approx 7{,}22 \text{ м/с}.$$

Когда первый осколок упадёт, он остановится на площадке; второй в этот момент движется вдоль прямой, соединяющей его с первым (скорость $\vec{v}_2(T)$ параллельна $\vec{u}$, которая направлена от второго к первому),

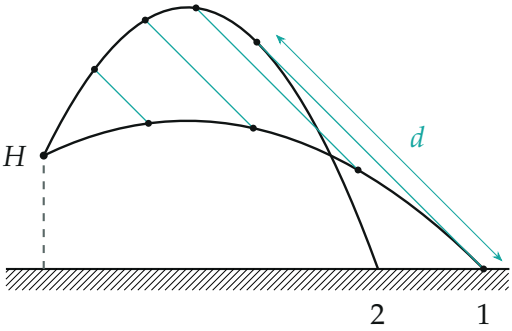
и приближается к нему, а потом ещё и разгоняется вниз. Значит, наибольшее расстояние достигается в момент T падения первого осколка.

6. Время полёта первого осколка. Вертикальная проекция скорости в момент падения равна $-V_1\cos 45^\circ = -7\sqrt{2}$:

$$V_0\sin\alpha - gT = -7\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\sqrt{23}+7\sqrt{2}}{g} \approx 1{,}47 \text{ с}.$$

Наибольшее расстояние

$$d = uT \approx 7{,}22 \cdot 1{,}47 \approx 10{,}6 \text{ м}.$$



Траектории осколков и положения в моменты 0,35; 0,7; 1,05 с и T: отрезки, соединяющие одновременные положения, параллельны друг другу и растут. Номера под площадкой — места падения.

Обратите внимание. Наибольшее расстояние — в момент падения первого осколка, а не второго: после него расстояние уменьшается.

Проверка. Положения в момент T: первый осколок — на площадке в точке $x_1 = V_0\cos\alpha\cdot T \approx 14{,}55$ м; второй — $x_2 = V_0\sin\alpha\cdot T \approx 7{,}05$ м, $y_2 = H + V_0\cos\alpha\, T - gT^2/2 = 7{,}5$ м. Разности координат равны 7,5 м и 7,5 м, то есть $d = 7{,}5\sqrt{2} \approx 10{,}6$ м — как и по uT, причём прямая, соединяющая осколки, идёт под 45°. Если $H \to 0$, то $V_1 \to V_0$.

Ответ. 1) $\varphi = 45^\circ$; 2) $V_1 = 14$ м/с; 3) $\cos\alpha = \dfrac{7\sqrt{2}}{11} \approx 0{,}9$; 4) $d = 7{,}5\sqrt{2} \approx 10{,}6$ м.